

研究生教育书系
自动控制工程学科

无源控制理论 及其应用

王久和 编著

Passivity-Based Control Theory and Its Applications



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

研究生教育书系
自动控制工程学科

无源控制理论及其应用

王久和 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书系统地论述了无源控制理论及其在电力电子装置和交流电动机控制中的应用。

本书内容分为 7 章,第 1 章介绍了本书所需的主要数学预备知识;第 2 章论述了系统的耗散性和无源性;第 3 章论述了系统的反馈、鲁棒及自适应无源控制器设计方法;第 4 章先论述了欧拉-拉格朗日系统方程的各种形式及性能,随后介绍了欧拉-拉格朗日误差系统;第 5 章先介绍了哈密顿系统的基本模型,随后论述了各种哈密顿系统的稳定性及无源控制器设计方法;第 6 章介绍了无源控制理论在电力电子装置中的应用;第 7 章介绍了无源控制理论在交流电动机控制中的应用。

本书可作为高等院校相关专业研究生、教师参考书,亦可供从事非线性控制理论、电力电子及电力传动相关研究的科研人员和工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

无源控制理论及其应用/王久和编著. —北京:电子工业出版社, 2010.11

(研究生教育书系·自动控制工程学科)

ISBN 978-7-121-12319-1

I. ①无… II. ①王… III. ①自动控制理论—研究生—教材 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 225529 号

责任编辑:苏颖杰(suyj@phei.com.cn)

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:720×1000 1/16 印张:14 字数:266 千字

印 次:2010 年 11 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

前 言

无源控制理论是从网络理论和其他物理分支中发展出来的，已成为研究控制系统的有效工具之一。由于系统无源性的物理背景和无源性与 Lyapunov 函数密切相关，且是从系统的能量属性研究系统的控制问题，使得无源控制理论在非线性系统控制器设计中得到了应用。无源控制 (Passivity-Based Control, PBC) 方法最早应用于机器人控制，后来墨西哥 Ortega 等学者将无源性概念引入电力电子技术装置和电机控制中，使控制器得到了简化。由于无源控制理论是从系统的能量入手，寻求与被控制量相关的能量函数，设计的无源控制律可使能量函数按期望的能量函数分布，从而达到控制目的。利用无源控制理论设计的系统控制器可实现系统的全局稳定性，无奇异点问题，对系统参数变化及外来摄动有较强的鲁棒性，是一种本质上的非线性控制方法。因此，无源控制理论日益得到国内外专家学者的关注。

由于在实际工程中，多数非线性系统的模型可表示成仿射非线性、欧拉-拉格朗日方程及哈密顿方程的形式，结合上述方程和系统的无源性进行系统无源控制器设计，已成为解决工程实际问题的有效途径。为推进我国无源控制理论在实际工程中的应用，本人根据自己对无源控制理论的理解及应用，结合国内外专家学者无源控制理论研究与应用的成果，尝试编写了此书，希望能够抛砖引玉，激起国内广大学者对无源控制理论更大的兴趣，同时对学习无源控制理论的初学者有所裨益。

本书内容分为 7 章，第 1 章介绍了本书所需的主要数学预备知识；第 2 章论述了系统的耗散性、无源性及其稳定性；第 3 章论述了系统的反馈、鲁棒及自适应无源控制器设计方法；第 4 章先论述了欧拉-拉格朗日系统方程的各种形式及性能，随后介绍了欧拉-拉格朗日误差系统；第 5 章先介绍了哈密顿系统的基本模型，随后论述了各种哈密顿系统的稳定性及无源控制器设计方法；第 6 章介绍了无源控制理论在电力电子装置中的应用；第 7 章介绍了无源控制理论在交流电动机控制中的应用。

在本书编写过程中，上海交通大学姜建国教授、北京科技大学李华德教授、刘贺平教授提出许多有益的建议，使本书的内容编排和选取更加合理，保证了本书

的质量和科学性，在此表示衷心感谢！本书的出版得到了北京市属高等学校人才强教深化计划“学术创新团队建设计划”项目（PHR201007130）的资助。

本书除选用自己的一些无源控制理论应用研究成果外，还选用了部分国内外学者的无源控制理论研究及在电力电子技术装置、交流电动机控制中的研究成果，在此表示诚挚的感谢！

鉴于本人的写作能力和学术水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者给予批评指正。

王久和

2010年8月于北京

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 稳定性理论	1
1.1.1 基于 Lyapunov 稳定性的理论	1
1.1.2 LaSalle 不变集定理	3
1.2 函数空间	5
1.2.1 L_q 空间	5
1.2.2 索伯列夫空间	7
1.3 微分几何	7
1.3.1 非线性坐标变换与微分同胚	7
1.3.2 李导数	8
1.3.3 相对阶	10
第 2 章 系统的耗散性和无源性	13
2.1 耗散性和无源性	13
2.1.1 物理系统的基本性能	13
2.1.2 系统的耗散性和无源性定义	14
2.1.3 耗散性、无源性与稳定性	16
2.2 耗散性与 L_2 增益、 L_2 稳定性	19
2.2.1 耗散性与 L_2 增益	19
2.2.2 耗散性与 L_2 稳定性	21
2.3 并联系统和负反馈连接系统的无源性	21
2.3.1 并联系统的无源性	21
2.3.2 负反馈连接系统的无源性	22
2.4 系统的可无源性	23
2.4.1 系统的零状态可检测性	23
2.4.2 KYP 定理	24
2.4.3 相对阶与无源性	25
2.4.4 鲁棒无源性	28

第 3 章 基于无源性的系统设计	33
3.1 反馈无源化控制器设计	33
3.1.1 状态反馈无源化控制器设计	33
3.1.2 输出反馈无源化控制器设计	34
3.2 鲁棒无源控制器设计	35
3.2.1 系统模型变换	35
3.2.2 鲁棒无源控制器设计方法	36
3.3 自适应无源控制器设计	40
3.3.1 不确定系统的无源化问题	40
3.3.2 自适应无源控制器设计方法	41
第 4 章 欧拉-拉格朗日系统	45
4.1 系统的欧拉-拉格朗日方程	45
4.1.1 欧拉-拉格朗日方程的基本形式	45
4.1.2 欧拉-拉格朗日方程的一般形式	45
4.1.3 欧拉-拉格朗日方程的特性	46
4.2 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日方程	47
4.2.1 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日方程	47
4.2.2 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日系统的无源性	48
4.2.3 欧拉-拉格朗日系统的分解	49
4.2.4 欧拉-拉格朗日系统控制器设计	50
4.3 欧拉-拉格朗日误差系统	52
4.3.1 欧拉-拉格朗日误差系统 I	52
4.3.2 欧拉-拉格朗日误差系统 II	54
第 5 章 哈密顿系统理论	57
5.1 哈密顿系统	57
5.1.1 从欧拉-拉格朗日方程到哈密顿系统	57
5.1.2 端口受控哈密顿系统的基本性能	61
5.1.3 端口受控的耗散哈密顿系统	66
5.2 端口受控哈密顿系统的控制	70
5.2.1 端口受控的耗散哈密顿系统标准反馈互联控制	70
5.2.2 基于循环无源性的端口受控的耗散哈密顿系统互联控制	75
5.2.3 基于无源性的端口受控的耗散哈密顿系统互联控制	86
5.3 时变端口受控的耗散哈密顿系统	94
5.3.1 时变 PCHD 系统的稳定性及控制器	94

5.3.2 非线性时变系统的 PCHD 实现	104
5.4 分布参数哈密顿系统	107
5.4.1 狄拉克结构和 PCHD 系统	107
5.4.2 哈密顿系统的互联控制	112
5.5 切换耗散哈密顿系统	117
5.5.1 切换耗散哈密顿系统及其稳定性	117
5.5.2 切换耗散哈密顿系统的 H_∞ 控制	122
第 6 章 无源控制理论在电力电子装置中的应用	129
6.1 无源控制理论在 AC/DC 变换器中的应用	129
6.1.1 基于 EL 模型的 AC/DC 变换器无源控制	129
6.1.2 基于 PCHD 模型的 AC/DC 变换器无源控制	138
6.2 无源控制理论在 DC/DC 变换器中的应用	147
6.2.1 基于反馈无源化的 Buck 型 DC/DC 变换器无源控制	147
6.2.2 基于 EL 方程的 Buck 型 DC/DC 变换器无源控制	152
6.3 无源控制理论在电力补偿器中的应用	156
6.3.1 基于 EL 模型的静止无功补偿器无源控制	156
6.3.2 基于 PCHD 模型的静止无功补偿器无源控制	161
6.4 无源控制理论在电力滤波器中的应用	165
6.4.1 基于 EL 模型的有源滤波器无源控制	166
6.4.2 基于 PCHD 模型的有源滤波器无源控制	169
第 7 章 无源控制理论在交流电动机控制中的应用	173
7.1 交流异步电动机无源控制	173
7.1.1 基于 EL 模型的交流异步电动机无源控制	173
7.1.2 基于 PCHD 模型的交流异步电动机无源控制	178
7.1.3 基于无源的交流异步电动机能量最优控制	187
7.2 交流同步电动机无源控制	195
7.2.1 基于 EL 模型的交流同步电动机无源控制	195
7.2.2 交流永磁同步电动机无源控制	199
参考文献	210

第1章 预备知识

本章主要介绍本书所需的主要基础知识，如稳定性的理论（Lyapunov 稳定理论、LaSalle 不变集定理）、函数空间及微分几何。关于书中涉及的其他基础知识或术语请读者参考有关文献。

1.1 稳定性理论

1.1.1 基于 Lyapunov 稳定性的理论

研究由微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.1)$$

描述的非线性系统。

式 (1.1.1) 中， $\mathbf{x} \in R^n$ 为状态变量； $t \in R$ 为表示时间的参量。

1. 几个概念

设 $U \subset R^n$ 是原点 $\mathbf{x}_0 = 0$ 的一个邻域， $J = [t_0, \infty)$ ， $t_0 \geq 0$ 是初始时刻，则有以下定义：

定义 1.1.1 如果函数 $W: U \rightarrow R$ 满足

$$W(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (1.1.2)$$

且 $W(0) = 0$ ，则称 $W(\mathbf{x})$ 是正定的。

定义 1.1.2 如果对函数 $H: U \times J \rightarrow R$ ，存在一个正定函数 $W(\mathbf{x})$ 使得

$$H(\mathbf{x}, t) \geq W(\mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in U \times J \quad (1.1.3)$$

成立，且 $H(0, t) \equiv 0$ ，则称 $H(\mathbf{x}, t)$ 是正定的。如果有

$$H(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in U \times J \quad (1.1.4)$$

且 $H(0, t) \equiv 0$ ，则称 $H(\mathbf{x}, t)$ 是半正定的。

类似地，可定义负定、负半正定函数。

定义 1.1.3 (Lyapunov 函数) 设 $H(\mathbf{x}, t)$ ($H: U \times J \rightarrow R$) 是连续可微的正定函数，若 $H(\mathbf{x}, t)$ 沿微分方程 (1.1.1) 解的轨迹对 t 求导，其导数为

$$\dot{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.5)$$

半负定且连续, 则称 $H(\mathbf{x}, t)$ 是方程 (1.1.1) 关于平衡点 $\mathbf{x}_0 = 0$ 的 Lyapunov 函数, 其中 $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ 为

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

2. 稳定定理

(1) Lyapunov 稳定定理

对于系统 (1.1.1), 若存在 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$, 则 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是该系统稳定的平衡点。

(2) Lyapunov 渐近稳定定理

对于给定的正数 r , 令 $U = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in R^n, \|\mathbf{x}\| \leq r\}$, 并记 $J = [0, \infty)$ 。对于系统 (1.1.1), 若存在 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$ 和负定函数 $W: U \rightarrow R$, 使得沿系统 (1.1.1) 的任意解的轨迹为

$$\dot{H}(\mathbf{x}, t) \leq W(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \mathbf{x} \in U - \{0\} \quad (1.1.6)$$

且 $H(\bullet)$ 具有定常正定解, 则 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是该系统渐近稳定的平衡点。

(3) Lyapunov 指数稳定定理

对于系统 (1.1.1), 若 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$ 是系统的 Lyapunov 函数, 且满足

$$r_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq H(\mathbf{x}, t) \leq r_2 \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in U \times J$$

$$\frac{dH(\mathbf{x}, t)}{dt} \leq -\mu \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in U \times J$$

其中, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\mu > 0$ 为给定常数, 则零解 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是指数稳定的。

(4) Lyapunov 逆定理^[1]

设 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是非线性时变系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的平衡点, 且 $f(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R^n$ 连续可微, 雅克比矩阵 $\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$ 在 $U \times J$ 上有界。如果系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的零解 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是指数稳定的, 即存在常数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 使得不等式

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)} \quad \forall (\mathbf{x}_0, t_0) \in U \times J \quad (1.1.7)$$

成立, 则一定存在 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$ 和常数 $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$ 使得不等式

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \|x\|^2 \leq H(x, t) \leq r_2 \|x\|^2 \quad \forall (x, t) \in U \times J \\ \frac{dH(x, t)}{dt} \leq -\mu \|x\|^2 \quad \forall (x, t) \in U \times J \\ \left\| \frac{\partial H}{\partial x} \right\| \leq \lambda \|x\| \quad \forall (x, t) \in U \times J \end{array} \right. \quad (1.1.8)$$

成立。

1.1.2 LaSalle 不变集定理

为判断系统的渐进稳定性，必须验证 Lyapunov 函数 $H(x, t)$ 沿系统状态轨迹的严格负定性。在实际系统中，构造出来的 Lyapunov 函数往往只满足 $H(x, t) \leq 0$ 。对此，可用 LaSalle 不变集定理研究系统的渐进稳定性。下面只给出一些结论，有关证明可以参考文献[1]。

1. 不变集定义

LaSalle 不变集定理主要依据适当的 Lyapunov 函数刻画系统运动的极限集位置，从而利用极限集的不变性考察系统运动的渐进特性。

考察非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1.9)$$

式中， $f: U \rightarrow R^n$ 为连续向量函数且满足局部 Lipschitz 条件； U 为 R^n 中含原点的一个区域， $f(0) = 0$ 。

定义 1.1.4 设系统 (1.1.9) 的解是 $x(t)$ ，若存在时间序列 $\{t_n\}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$ ，则 p 是 $x(t)$ 的一个正向极限点。

定义 1.1.5 设 $M \subset R^n$ ，若对任意初始条件 $x(0) = x_0 \in M$ ，系统 (1.1.9) 的解是 $x(t) = \varphi(t, x_0)$ ，满足

$$x(t) \in M \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1.10)$$

则称 M 是关于系统 (1.1.9) 的正向不变集。

显然，对于系统 (1.1.9)，平衡点 $x = 0$ 是一个不变集。对一般的系统，不变集可以包含一个或几个平衡点，也可是状态空间的一个子集合。

定义 1.1.6 若对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $T > 0$ 使得

$$\inf_{p \in M} \|p - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > T \quad (1.1.11)$$

则称 $x(t)$ 随时间 t 趋向于集合 M ，记作： $x(t) \rightarrow M$ 。

设系统 (1.1.9) 的解 $x(t)$ 对 $t \geq 0$ 是有界的，则对任意给定的初始条件

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, 存在时间序列 $t_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}_0' \quad (1.1.12)$$

即存在正向极限点 \mathbf{x}_0' 与之对应。

令 L^+ 表示系统 (1.1.9) 所有正向极限点组成的集合 (称正向极限集), 可以证明 L^+ 是有界闭集。

若系统 (1.1.9) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 对 $t \geq 0$ 是有界的, 那么正向极限集 L^+ 是系统 (1.1.9) 的正向不变集^[1], 且

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \quad (1.1.13)$$

2. LaSalle 不变集定理

定理 1.1.1 设 $\Omega \subset U$ 是系统 (1.1.9) 的有界正向不变集。若存在定义在 U 上的连续可微函数 $H: U \rightarrow R$, 满足

$$\dot{H} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.1.14)$$

那么, 该系统对应于任意初始状态 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 的解 $\mathbf{x}(t)$ 随时间 t 趋向于 M , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in M \quad (1.1.15)$$

式中, M 是集合 $E = \{\mathbf{x} | \dot{H}(\mathbf{x}) = 0\}$ 所包含的最大不变集。

LaSalle 不变集定理的几何解释如图 1.1.1 所示。由 $H(\mathbf{x})$ 的单调性容易理解 $\mathbf{x}(t)$ 将趋近于 $\dot{H} = 0$ 的集合 E 。该定理的意义就在于能够得出 $\mathbf{x}(t)$ 不仅趋近于 E , 而且最终会进入 E , 并进一步趋近于不变集 M (准确地讲, 趋近于 L^+)。因此, 如果能够判断系统在 E 中的不变集只包含原点, 那么, 即使无法验证 $\dot{H}(\mathbf{x})$ 的严格负定性, 也同样能够得出平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是渐进稳定的结论。

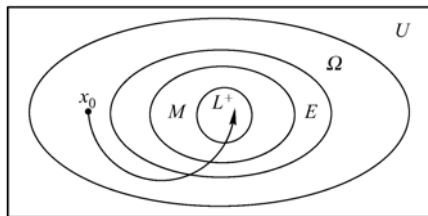


图 1.1.1 LaSalle 不变集定理的几何解释

考察时变非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.16)$$

式中, $f: U \times [0, \infty) \rightarrow R (U \subset R^n)$ 是关于 t 的连续向量函数, 且对 x 满足局部 Lipschitz 条件, $f(0, t) = 0$ 。

定理 1.1.2 对时变系统 (1.1.16), 若存在连续可微的函数 $H: U \times R^+ \rightarrow R^+$ 满足

$$\begin{cases} \gamma_1(\|x\|) \leq H(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \\ \dot{H}(x, t) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \end{cases} \quad \forall (x, t) \in U \times R^+ \quad (1.1.17)$$

式中, $\gamma_1(\bullet)$ 和 $\gamma_2(\bullet)$ 是单调增加且 $\gamma(0) = 0$ 、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma(a) = \infty$ 的函数; $W(\bullet)$ 是半正定连续函数。

则系统 (1.1.16) 的解 $x(t)$ 有界且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W[x(t)] = 0 \quad (1.1.18)$$

若 $W(\bullet)$ 是正定函数, 则系统 (1.1.16) 的平衡点 $x_0 = 0$ 是渐进稳定的。

1.2 函数空间

1.2.1 L_q 空间^[2~4]

1. L_q 空间及其扩展

定义 1.2.1 对任意正整数 q , 如果满足 $\int_0^\infty |f(t)|^q dt < \infty$, 则称可测函数 $f(t): R^+ \rightarrow R$ 属于集合 $L_q[0, \infty) = L_q$, 记为 $f \in L_q$ 。若有 $\sup_{t \in R^+} |f(t)| < \infty$, 则称可测函数 $f(t): R^+ \rightarrow R$ 属于集合 $L_\infty[0, \infty) = L_\infty$, 记为 $f \in L_\infty$ 。

定义 1.2.2 称向量函数 $f(t): R^+ \rightarrow R^n$, $f = (f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n)^T$ 属于集合 L_q , 若其每个分量 $f_i \in L_q, i=1, 2, \cdots, n$, 并定义

$$\|f\|_q = \left[\int_0^\infty |f(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \quad q=1, 2, \cdots, \infty \quad (1.2.1)$$

定义 1.2.3 对任意函数 $f(t): R^+ \rightarrow R^n$, 给定任意正数 τ , 若

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f(t) & t \leq \tau, t \in R^+ \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad (1.2.2)$$

则称 $f_\tau(t)$ 为 $f(t)$ 在 $[0, \tau]$ 处的截断函数。任意给定 $q=1, 2, \cdots, \infty$, 对于一切可测函数 $f(t): R^+ \rightarrow R$, 当 $f_\tau(t) \in L_q$ 对于所有满足 $0 \leq \tau < \infty$ 的 τ 成立时, 则 f 属于 L_{qe} 。 L_{qe} 称为 L_q 的扩展或扩展 L_q 空间。

定义 1.2.4 称算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$ 为因果的, 若

$$(Gu)_\tau = (Gu_\tau)_\tau \quad \forall \tau \geq 0 \quad (1.2.3)$$

因果性是指 t 时刻在算子作用下系统的输出与 t 时刻以后的输入无关, 只取决于 t 时刻当前和以前的输入。

2. L_q 稳定性和 L_q 增益

定义 1.2.5 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$, 若 $u \in L_q \Rightarrow Gu \in L_q$, 则称 G 为 L_q 稳定的。

定义 1.2.6 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$, 则称 G 具有不超过 γ_q 的有限 L_q 增益, 若存在常数 b_q 使得

$$\|(Gu)_\tau\|_q \leq \gamma_q \|u_\tau\|_q + b_q \quad \forall u \in L_{qe} \quad \forall \tau \geq 0 \quad (1.2.4)$$

成立。

引理 1.2.1 设算子 $G: L_{qe} \mapsto L_{qe}$, 则 G 具有不超过 γ_q 的有限 L_q 增益的充分必要条件是存在常数 b_q 使得

$$\|Gu\|_q \leq \gamma_q \|u\|_q + b_q \quad \forall u \in L_q \quad (1.2.5)$$

成立。

证明:

① 必要性。令式 (1.2.4) 中 $\tau \rightarrow \infty$ 即知结论成立。

② 充分性。对任意常数 $\forall \tau \geq 0$, 由 $u \in L_{qe}$ 即知 $u_\tau \in L_q$ 。根据式 (1.2.5) 有

$$\|Gu\|_q \leq \gamma_q \|u\|_q + b_q \quad (1.2.6)$$

由因果算子定义可知 $(Gu)_\tau = (Gu)_\tau$, 根据式 (1.2.6) 有

$$\|(Gu)_\tau\|_q = \|(Gu)_\tau\|_q \leq \|Gu_\tau\|_q \leq \gamma_q \|u_\tau\|_q + b_q \quad (1.2.7)$$

从而结论成立。

显然, 如果系统具有 L_q 增益, 则它必然是 L_q 稳定的; 反之亦然。于是得到如下定理。

定理 1.2.1 设算子 $G: L_{2e} \mapsto L_{2e}$ 有 L_2 增益 $\gamma(G)$, 则

$$\gamma(G) = \inf \left\{ \gamma \mid u \in L_{2e}, \forall \tau \geq 0, \exists b(\gamma), \|Gu_\tau\|^2 \leq \gamma^2 \|u_\tau\|^2 + b(\gamma) \right\} \quad (1.2.8)$$

证明见参考文献[2]。

当 $q=2$ 时, L_q 空间、 L_q 稳定性和 L_q 增益就变成了 L_2 空间、 L_2 稳定性和 L_2 增益。由于 L_2 范数为

$$\|f\|_2 = \left[\int_0^\infty f^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.9)$$

由式 (1.2.9) 可以看出 L_2 范数具有明确的工程意义^[1], 即若将 $f \in L_2$ 看成时域信号, 则可认为 f 的 L_2 范数 $\|f\|_2$ 描述了这一信号所蕴涵的能量。例如, I 是通过 1Ω 电阻的电流, 则 $\int_0^\infty I^2 dt$ 描述的是该电阻在 $[0, +\infty)$ 内所消耗的电能。

1.2.2 索伯列夫空间

设 Ω 是 R^n 中的开集, $1 \leq p < \infty$; n 是正整数, X_1, X_2, \dots, X_n 都是线性赋范空间。 $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 是 X_1, X_2, \dots, X_n 的笛卡儿乘积, \mathbf{X} 中的元素 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, 其中 $f_i \in X_i$ 。 \mathbf{X} 也是线性赋范空间, 元素 f 的范数为

$$\|f, \mathbf{X}\| = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i, X_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.2.10)$$

或

$$\|f, \mathbf{X}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \|f_i, X_i\| \quad (1.2.11)$$

定义 1.2.7 设 α 是 n 重指数, m 是非负整数, 向量空间

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.2.12)$$

其中元素的范数定义为

$$\|f, W^{m,p}(\Omega)\| = \|f\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2.13)$$

于是 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一个线性赋范空间, 这样的空间称为索伯列夫空间 (Sobolev Spae)^[5]。 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间是一个 Banach 空间 (证明见参考文献[5])。

1.3 微分几何^[6~8]

1.3.1 非线性坐标变换与微分同胚

非线性坐标变换可表示为

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) \quad (1.3.1)$$

式中, \mathbf{z} 为与 \mathbf{x} 同维的向量; Φ 为非线性函数向量。

式 (1.3.1) 的逆变换为

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad (1.3.2)$$

存在非线性坐标变换 $\Phi(\mathbf{x})$ 必须满足以下条件:

① 单值性。 $\Phi(\mathbf{x})$ 与 $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ 是一一对应的, 亦为可逆条件。

② 可微性。 $\Phi(\mathbf{x})$ 与 $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ 皆为光滑函数, 它们的任意阶偏导数都是存在的, 亦为可微条件。

如果上述两个条件是满足的, 则 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 就是一个合格的坐标变换。同时, 该坐标变换表达式 $\Phi(\mathbf{x})$ 被称为两个坐标空间的一个微分同胚。

判断非线性映射 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 在 x_0 的邻域是不是局部微分同胚, 有下列命题进行判断:

设 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 是定义在 R^n 空间的某一子集 U 中的光滑函数, 如果在 $\mathbf{x} = x_0$ 点处的雅可比矩阵 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=x_0}$ 是非奇异的, 则在包括 x_0 点在内的 U 的一个开子集 U^0 中, $\Phi(\mathbf{x})$ 是一个局部微分同胚。

例 1.3.1 考虑以下函数:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

这个函数对于在空间 R^2 中的所有点 \mathbf{x} 都是有定义的, 其雅可比矩阵为

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

在点 $x_0 = (0 \ 0)$ 处是非奇异的, 其秩为 2。因此, 该函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 在包括 $x_0 = (0 \ 0)$ 点在内的子集上是一个局部微分同胚; 进一步考察可知, 这个包括 $x_0 = (0 \ 0)$ 在内的开子集是

$$U^0 = \left\{ (x_1, x_2) : |x_2| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

因此, 在这个开子集上, $\Phi(\mathbf{x})$ 逆函数是单值的, 光滑的。

1.3.2 李导数

设开集 $U \subset R^n$, $\mathbf{x} \in U$, 在 U 上给出一个光滑的标量函数为 $h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和一个向量场

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

根据 $h(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 定义一个新的标量函数, 记作 $L_f h(\mathbf{x})$, 有

$$L_f h(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \quad (1.3.3)$$

式中, $\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$ 。

上述定义的标量函数 $L_f h(\mathbf{x})$ 表示函数 $h(\mathbf{x})$ 沿向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的导数, 称为李导数。

由于李导数 $L_f h(\mathbf{x})$ 是一个标量函数, 可再次沿向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 求李导数, 依次类推直至 k 阶李导数, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} L_f [L_f h(\mathbf{x})] = L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial [L_f h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^k h(\mathbf{x}) = \frac{\partial [L_f^{k-1} h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

李导数 $L_f h(\mathbf{x})$ 可以沿着另一个向量场 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 求李导数, 即

$$L_g [L_f h(\mathbf{x})] = \frac{\partial [L_f h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.3.5)$$

k 阶李导数 $L_f^k h(\mathbf{x})$ 也可沿着另一个向量场 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 求李导数, 即

$$L_g [L_f^k h(\mathbf{x})] = \frac{\partial [L_f^k h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.3.6)$$

例 1.3.2 给定标量函数 $h(\mathbf{x}) = x_3$ 和向量场

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ e^{x_2} \\ e^{x_3} \end{pmatrix}$$

求 $L_f^3 h(\mathbf{x})$ 及 $L_g L_f^2 h(\mathbf{x})$ 。

解: 根据定义 (1.3.3), 得

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

由式 (1.3.4) 可得

$$L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial[L_f h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = -(x_1 + x_2^2)$$

$$L_f^3 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial[L_f^2 h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = -2x_2(x_1 + x_2^2)$$

根据式 (1.3.6), 可以求得

$$L_g L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial[L_f^2 h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{x_1} \\ \mathbf{e}^{x_2} \\ \mathbf{e}^{x_3} \end{pmatrix} = -\mathbf{e}^{x_1} - 2x_2 \mathbf{e}^{x_2}$$

1.3.3 相对阶

1. 单输入单输出的非线性系统相对阶

对于单输入单输出仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.3.7)$$

式中, $\mathbf{x} \in R^n, y \in R^1, \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 为向量场。

如果①输出函数 $h(\mathbf{x})$ 对向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的 k 阶李导数对向量场 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的李导数在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 的邻域内的值为 0, 即 $L_g L_f^k h(\mathbf{x}) = 0$; ② $h(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的 $\gamma-1$ 阶李导数 ($k < \gamma-1$) 对 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的李导数在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 的邻域内的值不为 0, 即 $L_g L_f^{\gamma-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$, 则定义非线性系统 (1.3.7) 在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 的邻域内的相对阶为 γ 。

例 1.3.3 非线性系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ c_1(1-x_1^2)x_2 - c_2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = h(\mathbf{x}) = x_1 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为常数})$$

求系统的相对阶。

解: 首先求 $h(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的零阶李导数再对 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 求李导数, 得

$$L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) = L_g h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

为求 $L_g L_f h(\mathbf{x})$, 先求得

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ c_1(1-x_1^2)x_2 - c_2x_1 \end{pmatrix} = x_2$$

则有

$$L_g L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial [L_f h(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

由上可得系统的相对阶 $\gamma = 2$ 。

2. 多输入多输出的非线性系统相对阶

考虑多输入多输出系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})u_1 + g_2(\mathbf{x})u_2 + \cdots + g_m(\mathbf{x})u_m \\ y_1(t) = h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ y_m(t) = h_m(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.3.8)$$

式中, \mathbf{x} 为 n 维状态向量; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 及 $g_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\dots,m$, 皆为 n 维状态向量; u_i 为第 i 个控制输入量; $y_i(t)$ 为第 i 个输出量; $h_i(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的标量函数。

对于每一个输出 $y_i(t) = h_i(\mathbf{x})$ 有一个相应的相对阶 γ_i , 所以多变量系统的相对阶 γ 是一集合, 即

$$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} \quad (1.3.9)$$

每一个子相对阶 γ_i 满足以下条件, 即在 \mathbf{x}_0 的邻域内有

$$\textcircled{1} \begin{cases} L_{g_1} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{g_2} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad k < \gamma_i - 1;$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} L_{g_1} L_f^{\gamma_i-1} h_i(\mathbf{x}) \\ L_{g_2} L_f^{\gamma_i-1} h_i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{g_m} L_f^{\gamma_i-1} h_i(\mathbf{x}) \end{cases} \quad i=1,2,\dots,m \text{ 不全为零};$$

$$\textcircled{3} \text{ 矩阵 } \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{\gamma_1-1} h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{\gamma_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{\gamma_2-1} h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{\gamma_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\gamma_m-1} h_m(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f^{\gamma_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ 在 } x_0 \text{ 的邻域}$$

内是非奇异的。

综上所述，可得相对阶定义：对于（1.3.8）所示的多变量非线性系统，如果在 \mathbf{x}_0 的邻域内有以下条件成立，即，对于 $k_i < \gamma_i - 1$ 有

$$L_{g_j} L_f^{k_i} h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad j=1,2,\cdots,m \quad i=1,2,\cdots,m$$

且 $m \times m$ 矩阵 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 是非奇异的，则 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ 为系统的相对阶集合，且其中每一个子相对阶 γ_i 与输出 $y_i(t) = h_i(\mathbf{x})$ 是对应的。

第2章 系统的耗散性和无源性

系统中各物理量都是能量变化（吸收、转换及消耗）的反映，例如，直线（旋转）运动物体的速度（角速度）变化体现了动能变化，流过电感中的电流变化体现了磁场能变化，电容两端的电压变化体现了电场能变化。因此，应从能量的观点研究系统，换句话说，只要系统的能量得以控制，系统的物理量就得以控制。系统的耗散性和无源性就是系统的能量变化属性。

2.1 耗散性和无源性

2.1.1 物理系统的基本性能

耗散性（dissipativity）是与能量损失或耗散现象紧密相关物理系统的基本性质^[9]。典型耗散系统的例子是电路，电路中的部分电能和磁场能在电阻中以热的形式耗散。在机械系统中，摩擦也起到类似的作用。要精确地定义耗散性，需引入两个函数，一是反映流入系统能量的速率，即供给率（supply rate）；二是测量存入系统能量的存储函数（storage function）。这些函数是通过耗散不等式联系在一起。耗散不等式的意思是沿着耗散系统的时间轨迹供给率不少于能量存储的增加。这就表明耗散系统存储的能量不能多于外界供入的能量，二者之差是耗散的能量。

例 2.1.1 RLC 串联电路如图 2.1.1 所示。

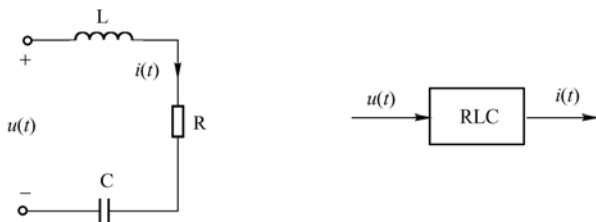


图 2.1.1 RLC 串联电路

对于图 2.1.1 所示线性时不变（Linear Time Invariant, LTI）RLC 串联电路，根据基尔霍夫定律容易得到电路的动态方程

$$u = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + L \frac{di}{dt} \quad (2.1.1)$$

在式 (2.1.1) 两边乘 i ，可得

$$iu = Ri^2 + \frac{1}{C} i \int_0^t i(\tau) d\tau + Li \frac{di}{dt} \quad (2.1.2)$$

式 (2.1.2) 等效为

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2C} \left(\int_0^t i(\tau) d\tau \right)^2}_{H_C} + \underbrace{\frac{1}{2} Li^2}_{H_L} \right] = ui - Ri^2 \quad (2.1.3)$$

式中， H_C 为存储在电容中的电场能； H_L 为存储在电感中磁场能。

对式 (2.1.3) 从 0 到 t 积分，得

$$\underbrace{H(t)}_{\text{时刻能量}} = \underbrace{H(0)}_{\text{初始能量}} + \underbrace{\int_0^t u(\tau)i(\tau) d\tau}_{\text{供给能量}} - \underbrace{\int_0^t Ri^2(\tau) d\tau}_{\text{耗散能量}} \quad (2.1.4)$$

式中， $H \triangleq H_C + H_L$ 表示电路的总能量。

在例 2.1.1 中，供给率函数 ui 是外部电源向电路输入的功率，而存储函数 H 是系统的总能量。根据上述的定义，RLC 串联电路是耗散的。

在上述的 RLC 串联电路中，如果把 u 作为输入， i 作为输出 y （尽管没有特殊指明），则认为系统 $S: u \mapsto y$ 是无源的。

2.1.2 系统的耗散性和无源性定义^[1, 4]

考虑多输入多输出系统

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in R^n \quad (2.1.5)$$

式中， $\mathbf{x} \in R^n$ ， $\mathbf{u} \in R^m$ 为输入； $\mathbf{y} \in R^p$ 为输出，是关于 \mathbf{x} 连续的； \mathbf{f} 是关于 (\mathbf{x}, \mathbf{u}) 局部 Lipschitz 的。

式 (2.1.5) 定义一个因果关系的动态算子 $G: L_{2e} \rightarrow L_{2e}: \mathbf{u} \mapsto \mathbf{y}$ 。据此，有如下定义：

定义 2.1.1（耗散性） 当且仅当存在存储函数 $H: R^n \rightarrow R \geq 0$ 有

$$H[\mathbf{x}(T)] \leq H[\mathbf{x}(0)] + \int_0^T w[\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau)] d\tau \quad T \geq 0 \quad (2.1.6)$$

则系统 S 相对于供给率 $w(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ 是耗散的。

定义 2.1.2（无源性） 当系统是耗散的，且供给率 $w(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ ，则 S 是无源的。显然，无源性是耗散性的特例。如果系统是耗散的，且 $w(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y} - \delta_1 \|\mathbf{u}\|^2$

(δ_1 为输入严格无源度, $\delta_1 > 0$), 则 S 是输入严格无源的 (Input Strictly Passive, ISP)。同理, 如果系统是耗散的, 且 $w(u, y) = u^T y - \delta_0 \|y\|^2$ (δ_0 为输出严格无源度, $\delta_0 > 0$), 则 S 是输出严格无源的 (Output Strictly Passive, OSP)。

更具体地讲, 对于系统 (2.1.5), 如果存在连续可微半正定函数 $H(x)$ (存储函数) 使得

$$u^T y \geq \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} f(x, u) = L_f H(x) \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^m \quad (2.1.7)$$

成立, 则系统是无源的。

实际上, 式 (2.1.7) 可写成

$$H[x(T)] - H[x(0)] \leq \int_0^T u^T y d\tau \quad (2.1.8)$$

式 (2.1.8) 表明系统能量增长总和总是小于外部注入的能量总和, 即系统运动总是伴随着能量损失, $u^T y$ 可解释为伴随着输入 u 由外部注入到系统的能量供给率。故称式 (2.1.7) 或式 (2.1.8) 为系统的耗散不等式。

对于系统 (2.1.5), 若存在半正定能量存储函数 $H(x)$ 及正定函数 $Q(x)$, 对 $\forall T > 0$ 使得耗散不等式

$$H[x(T)] - H[x(0)] \leq \int_0^T u^T y d\tau - \int_0^T Q(x) d\tau \quad (2.1.9)$$

或

$$\dot{H} \leq u^T y - Q(x) \quad (2.1.10)$$

对系统的输入 u 、输出 y 及能量供给率 $u^T y$ 成立, 则系统是严格无源的。

由上述可知, 无源性是与系统外部输入、输出相关的概念。耗散不等式的物理意义就在于它表明系统的能量由初始时刻到当前时刻的增长量小于或等于外部注入的能量总和, 表明无源系统的运动总是伴随着能量的损失。

例 2.1.2 研究图 2.1.2 所示的弹簧-阻尼系统。小车质量为 m , 且在外力 u 的作用下沿水平方向运动。设小车的位置用 x 表示, 弹簧的弹性系数和阻尼器的黏性系数分别用 k 和 f 表示, 则根据牛顿运动定律可得到该系统的运动方程

$$m\ddot{x} = u - fx - kx \quad (2.1.11)$$

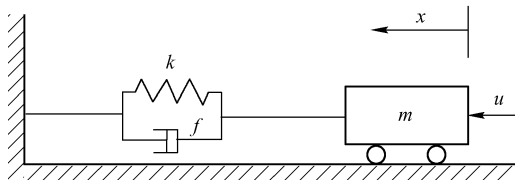


图 2.1.2 弹簧-阻尼系统

如果把小车的速度 \dot{x} 作为该系统的输出信号, 即 $y = \dot{x}$ 。实际上, 该系统具有的能量总和为

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2.1.12)$$

式中, $\frac{1}{2}kx^2$ 为弹簧的弹性势能; $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 为小车的动能。

由式 (2.1.12) 两边对时间求导可得

$$\dot{H}(x, \dot{x}) = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = kx\dot{x} + \dot{x}(u - f\dot{x} - kx) = -f\dot{x}^2 + u\dot{x} \leq uy \quad (2.1.13)$$

对式 (2.1.13) 求两边积分可知

$$H(x, \dot{x}) - H(x_0, \dot{x}_0) \leq \int_0^T u y d\tau \quad \forall T \geq 0 \quad (2.1.14)$$

对任意的 u 都成立。表明弹簧-阻尼系统是无源的。

2.1.3 耗散性、无源性与稳定性^[1, 4]

设系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.1.15)$$

为耗散 (无源) 系统, 且 $H(\mathbf{x}) \geq 0$ 为相应的存储函数。 $H(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = 0$ 处取严格最小值, 即 $H(\mathbf{x}) > H(0), \forall \mathbf{x} \neq 0$, 则 $\mathbf{x} = 0$ 为系统 (2.1.15) 的自由运动 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$ 的稳定平衡状态。

下面利用 $H(\mathbf{x})$ 研究仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

的稳定性。对此, 给出零状态可观测和可检测定义。

定义 2.1.3 (零状态可观测) 对于系统 (2.1.16), 若

$$\mathbf{u}(t) = 0, \quad \mathbf{y}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = 0$$

则该系统称为零状态可观测的 (Zero State Observable, ZSO)。

定义 2.1.4 (零状态可检测) 对于系统 (2.1.16), 若

$$\mathbf{u}(t) = 0, \quad \mathbf{y}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

当则称系统是零状态可检测的 (Zero State Detectable, ZSD)。

利用上述 ZSO、ZSD 定义, 有如下定理:

定理 2.1.1 设半正定函数 $H(\mathbf{x}) \in C^1$ 为输出严格无源系统 (2.1.15) 的存储函数。

① 若系统是零状态可观测的, 则 $H(\mathbf{x}) > 0 (\forall \mathbf{x} \neq 0)$ 。

② 若函数 $H(\mathbf{x})$ 正定, 即 $H(\mathbf{x}) > 0 (\forall \mathbf{x} \neq 0)$, 且 $H(0) = 0$, 则系统 (2.1.15) 零状态可检测意味着 $\mathbf{x} = 0$ 为系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的局部渐进稳定的平衡状态。进一步讲, 若函数 $H(\mathbf{x})$ 为无穷大的, 则 $\mathbf{x} = 0$ 为系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的全部渐进稳定的平衡状态。

证明:

① 设系统是关于供给率 $w(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{y} - \delta_0 \|\mathbf{y}\|^2$ 耗散的, 函数 $H(\mathbf{x})$ 为相应的存储函数, 则 $H(\mathbf{x})$ 沿系统 (2.1.16) 的导数为

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y} - \delta_0 \|\mathbf{y}\|^2 \quad (2.1.17)$$

将 $\mathbf{u} = 0$ 代入 (2.1.17) 可得

$$H[\mathbf{x}(\tau)] - H[\mathbf{x}(0)] \leq -\delta_0 \int_0^\tau \|\mathbf{y}\|^2 dt \quad (2.1.18)$$

因为 $H(\mathbf{x}) \geq 0$, 有

$$H[\mathbf{x}(0)] \geq \delta_0 \int_0^\tau \|\mathbf{y}\|^2 dt \quad (2.1.19)$$

又设 $H(\mathbf{x}_0) = 0$, 则式 (2.1.19) 中取 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 得 $\mathbf{y}(t) = 0 (\forall t \geq 0)$ 。由零状态可观测条件可知 $\mathbf{x}(t) = 0 (\forall t \geq 0)$, 有 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = 0$, 故有 $H(\mathbf{x}) > 0 (\forall \mathbf{x} \neq 0)$ 。

② 根据稳定平衡状态的定义可知, $\mathbf{x} = 0$ 是 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的稳定平衡状态。又在式 (2.1.17) 中取 $\mathbf{u} = 0$ 得 $\dot{H}(\mathbf{x}) \leq -\delta_0 \|\mathbf{y}\|^2$ 。根据 ZSO, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y} = 0\}$ 内的解只有 $\mathbf{x} = 0$ 。因此, 根据 LaSalle 不变集定理可知, 系统的零平衡状态是渐进稳定的。若函数 $H(\mathbf{x})$ 是无穷大的, 则由 Lyapunov 稳定理论可知, 此时系统的零平衡状态是全局渐进稳定的。

综上所述, 无源系统在零状态可检测的条件下, 其连续可微的存储函数是正定的, 可以直接作为 Lyapunov 函数。因此, 系统必然是稳定的。

定理 2.1.2 如果系统 (2.1.16) 是关于正定存储函数 $H(\mathbf{x})$ 输出严格无源的, 且是 ZSD, 则 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$ 的原点是渐进稳定的。

证明: 取 $H(\mathbf{x})$ 为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的 Lyapunov 函数, 由于 $\dot{H} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y} - Q(\mathbf{x})$, 当 $\mathbf{u} = 0$ 时, $\dot{H} \leq -Q(\mathbf{x}) \leq -\delta \mathbf{y}^T \mathbf{y} \leq 0 (\delta > 0)$ 。根据 ZSD, 当 $\mathbf{u}(t) = 0$, $\mathbf{y}(t) = 0$ 时, 必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ 。因此, 根据 LaSalle 不变集定理可知, 原点是渐进稳定的。

定理 2.1.3 设系统 (2.1.16) 是无源的, 且没有直通通道 ($\mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0$), 则系统在常增益负反馈 $\mathbf{u} = -k\mathbf{y} (k > 0)$ 下渐进稳定的充分必要条件是该系统为零状态可检测的。

证明：根据系统的无源性，存储函数 $H(\mathbf{x})$ 沿着 (2.1.16) 的导数为

$$\dot{H}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y} = -k \mathbf{y}^T \mathbf{y} < 0 \quad \forall \mathbf{y} \neq 0 \quad (2.1.20)$$

显然，当且仅当 $\mathbf{y}=0$ 时， $\dot{H}(\mathbf{x})=0$ 。因此，考察 $\dot{H}(\mathbf{x})=0$ 的集合 $U=\{\mathbf{x}|\dot{H}(\mathbf{x})=0\}$ 。由于集合 U 中满足 $\mathbf{y}=0$ 。由系统零状态可检测性，可知集合 U 中的系统轨迹满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)=0$ 。因此，根据 LaSalle 不变集定理可知，该闭环系统是渐进稳定的。

例 2.1.3 若系统 (2.1.15) 为仿射非线性形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.1.21)$$

假设存在连续可微半正定函数 $H(\mathbf{x})$ ，使得

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f H \leq 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = L_g H = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.1.22)$$

成立，那么有

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] = L_f H + L_g H \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{y} + L_f H \quad (2.1.23)$$

式 (2.1.23) 表明系统是严格无源的。如果 $H(\mathbf{x})$ 是正定的，可得 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的原点是稳定的。

例 2.1.4 研究系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2(2x_1^2 + 1) + u \\ y = x_2 + x_1^2 \end{cases} \quad (2.1.24)$$

选取正定函数

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_2 + x_1^2)^2 \quad (2.1.25)$$

则 $H(x_1, x_2)$ 沿系统 (2.1.24) 的导数为

$$\dot{H}(x_1, x_2) = \dot{x}_1 x_1 + (x_2 + x_1^2)(\dot{x}_2 + 2x_1 \dot{x}_1) \leq u y$$

故系统是无源的。又当 $u=0$ ， $y=0$ 时，系统的动态方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2(2x_1^2 + 1) \end{cases} \quad (2.1.26)$$

根据系统 (2.1.26) 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t) = 0$$

所以, 系统 (2.1.24) 是零状态可检测的。根据定理 2.1.3, 取静态反馈 $\mathbf{u} = -k\mathbf{y} (k > 0)$, 闭环系统在原点 $(0,0)$ 是渐进稳定的。

2.2 耗散性与 L_2 增益^[1]、 L_2 稳定性

2.2.1 耗散性与 L_2 增益

对于仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

考虑 γ -供给率

$$w(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\gamma > 0) \quad (2.2.2)$$

如果系统 (2.2.1) 对于供给率 (2.2.2) 是耗散的, 则称该系统是 γ -耗散的。

引理 2.2.1 如果系统 (2.2.1) 是 γ -耗散的, 则该系统具有小于或等于 γ 的 L_2 增益。

证明: 如果系统 (2.2.1) 是 γ -耗散的并注意到 $H(0) = 0$, 沿任意零初始状态所对应的轨迹, 有不等式

$$0 \leq H[\mathbf{x}(T)] \leq \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2) d\tau \quad \forall T \geq 0 \quad (2.2.3)$$

对任意的输入 \mathbf{u} 都成立, 即对任意 $T > 0$, 有

$$\int_0^T \|\mathbf{y}(\tau)\|^2 d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \quad (2.2.4)$$

进一步假设该系统对任意 $\mathbf{u} \in L_2$, 有 $\mathbf{y} \in L_2$ 。那么, 系统输入空间到输出空间的算子为 T_{yu} , 其诱导范数 $\|T_{yu}\|$ 满足

$$\|T_{yu}\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \gamma \quad (2.2.5)$$

式中, $\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{u}\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$ 为 L_2 的范数。

式 (2.2.5) 的左端为系统 (2.2.1) 的 L_2 范数的定义。若式 (2.2.5) 成立, 则

系统 (2.2.1) 具有小于或等于 γ 的 L_2 增益。

例 2.2.1 对于图 2.1.2 所示弹簧-阻尼系统, 由例 2.1.2 可知, 如果将质量 m 的速度作为系统的输出, 即 $y = \dot{x}$, 那么该系统是无源的, 且质量 m 所具有的动能和势能之和就是对应的存储函数。

可以证明, 该系统从输入 u 到输出 $y = \dot{x}$ 具有小于或等于 $\gamma = 1/\sqrt{2f-1}$ 的 L_2 增益。

沿着任意状态轨迹, 求例 2.1.2 定义的能量函数 $H(x, \dot{x})$ 对时间的导数, 得

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, \dot{x}) &= \dot{x}u - f\dot{x}^2 = -\frac{1}{2}y^2 + yu - \left(f - \frac{1}{2}\right)y^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2f-1} - y^2\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4f-2}}u - \sqrt{f - \frac{1}{2}}y\right)^2\end{aligned}$$

令 $\gamma^2 = (2f-1)^{-1}$ 且假设 $2f > 1$, 由上式可得 γ -耗散不等式为 $\dot{H} \leq \frac{1}{2}(\gamma^2 u^2 - y^2)$ 。

因此, 由引理 2.2.1 可知, 该系统具有小于或等于 γ ($\gamma = 1/\sqrt{2f-1}$) 的 L_2 增益。

定理 2.2.1 对于给定的正数 γ , 存在光滑可微的存储函数 $H(x)$ 使得系统 (2.1.16) 是 γ -耗散的充分必要条件为不等式

$$\gamma^2 I - j^T(x)j(x) \geq 0 \quad (2.2.6)$$

成立, 且存在适当的函数向量 $l(x)$ 和函数矩阵 $\omega(x)$ 满足

$$\begin{cases} L_f H(x) \leq -\frac{1}{2}h^T(x)h(x) - l^T(x)l(x) \\ L_g H(x) = -h^T(x)j(x) - 2l^T(x)\omega(x) \\ \omega^T(x)\omega(x) = \frac{1}{2}[\gamma^2 I - j^T(x)j(x)] \end{cases} \quad (2.2.7)$$

证明详见参考文献[1]。

由定理 2.2.1 可推得系统 (2.2.1) 是 γ -耗散的充分必要条件是存在适当的函数向量 $l(x)$, 选取 $\omega(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma$, 满足

$$\begin{cases} L_f H(x) \leq -\frac{1}{2}h^T(x)h(x) - l^T(x)l(x) \\ L_g H(x) = -\sqrt{2}\gamma l^T(x) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

系统无源性与 L_2 增益的关系由下列命题给出:

命题 2.2.1 若系统 (2.1.15) 是输出严格无源的, 则它具有有限 L_2 增益。

证明：由于系统 (2.1.15) 是输出严格无源的，从而存在 $\delta_0 > 0$ 和 $H(\mathbf{x}) \geq 0$ 使得

$$H[\mathbf{x}(\tau)] - H[\mathbf{x}(0)] \leq \int_0^\tau (\mathbf{u}^T \mathbf{y} - \delta_0 \|\mathbf{y}\|^2) dt \quad (2.2.9)$$

成立。又由 Cauchy 不等式有

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y} \leq \frac{1}{2\delta_0} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\delta_0}{2} \|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \delta_0 > 0 \quad (2.2.10)$$

取 $\bar{\delta}_0 = \delta_0$ ， $\bar{H}(\mathbf{x}) = \frac{H(\mathbf{x})}{\delta_0}$ ，得

$$\bar{H}[\mathbf{x}(\tau)] - \bar{H}[\mathbf{x}(0)] \leq \int_0^\tau \left(\frac{1}{2\delta_0^2} \|\mathbf{u}\|^2 - \delta_0 \|\mathbf{y}\|^2 \right) dt \quad (2.2.11)$$

式 (2.2.11) 意味着系统具有不超过 $\frac{1}{\delta_0}$ 的 L_2 增益。

2.2.2 耗散性与 L_2 稳定性

定理 2.2.2 (L_2 稳定性) 如果系统是严格输出无源的，系统具有有限增益 L_2 稳定的。

根据定理 2.2.2，有如下推论：

如果状态空间系统是耗散的，且具有供给率 $w(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \gamma^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$ ($\gamma > 0$)，则是 L_2 稳定的。

2.3 并联系统和负反馈连接系统的无源性^[3]

2.3.1 并联系统的无源性

设系统 $S_1: \mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{y}_1$ 、 $S_2: \mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{y}_2$ 是无源的，则 S_1 和 S_2 并联形成的系统是无源的；若 S_1 和 S_2 有一个是严格无源的，则 S_1 和 S_2 并联形成的系统是严格无源的。

证明： S_1 和 S_2 并联如图 2.3.1 所示。

设 S_1 的存储函数为 H_1 、 S_2 的存储函数为 H_2 ，并联系统 H 的存储函数 $H = H_1 + H_2$ 。若 S_1 和 S_2 是无源的，则有不等式

$$\dot{H} = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 \leq \mathbf{u}_1^T \mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_2^T \mathbf{y}_2 = \mathbf{u}^T (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{u}^T \mathbf{y} \quad (2.3.1)$$

对系统的输入 \mathbf{u} 、输出 \mathbf{y} 及能量供给率 $\mathbf{u}^T \mathbf{y}$ 成立，则系统 S 是无源的。

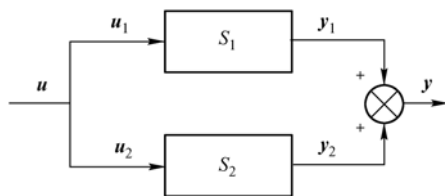


图 2.3.1 无源系统的并联

设 S_1 是严格无源的, S_2 是无源的, 则不等式

$$\dot{H} = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 \leq u_1^T y_1 - Q_1(x) + u_2^T y_2 = u^T (y_1 + y_2) - Q_1(x) = u^T y - Q_1(x) \quad (2.3.2)$$

对系统的输入 u 、输出 y 及能量供给率 $u^T y$ 成立, 则系统 S 是严格无源的。

2.3.2 负反馈连接系统的无源性

设系统 $S_1: u_1 \mapsto y_1$ 、 $S_2: u_2 \mapsto y_2$ 是无源的, 则 S_1 和 S_2 负反馈连接形成的系统是无源的; 若 S_1 和 S_2 都是严格无源的, 则 S_1 和 S_2 负反馈连接形成的系统是严格无源的。

证明: S_1 和 S_2 负反馈连接如图 2.3.2 所示。

设 S_1 的存储函数为 H_1 、 S_2 的存储函数为 H_2 , 负反馈连接形成的 S 的存储函数 $H = H_1 + H_2$ 。由图 2.3.2 可知

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + y_2 \\ u_2 = e_2 - y_1 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

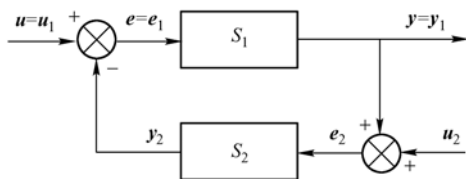


图 2.3.2 无源系统负反馈连接

若 S_1 和 S_2 是无源的, 则有不等式

$$\dot{H} = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 \leq e_1^T y_1 + e_2^T y_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 \quad (2.3.4)$$

当 $u_2 = 0$ 时, 根据式 (2.3.4), 不等式

$$\dot{H} \leq u^T y \quad (2.3.5)$$

对系统的输入 u 、输出 y 及能量供给率 $u^T y$ 成立, 则系统 S 是无源的。

若 S_1 和 S_2 都是严格无源的, 不等式

$$\dot{H} \leq u^T y - Q_1(x) - Q_2(x) \quad (2.3.6)$$

对系统的输入 u 、输出 y 及能量供给率 $u^T y$ 成立, 则系统 S 是严格无源的。

2.4 系统的可无源性

2.4.1 系统的零状态可检测性^[1]

对于系统 (2.1.5), 若当 $u(t)=0$, $y(t)=0$ 时, 必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)=0$, 则称系统是零状态可检测的。

对于系统 (2.1.5) 是零状态可检测的, 且存在光滑可微的正定存储函数 $H(x)$, 使得该系统是无源的, 那么在输入端施加静态反馈

$$u = \varphi(y) \quad \varphi(0)=0 \quad (2.4.1)$$

式中, φ 是满足 $y^T \varphi(y) < 0$, $\forall y \neq 0$ 的任意函数, 则根据无源性, 沿闭环系统的状态轨迹, 有

$$\dot{H}(x) \leq y^T u = y^T \varphi(y) < 0 \quad \forall y \neq 0 \quad (2.4.2)$$

显然, $\dot{H}(x)=0$ 当且仅当 $y=0$ 。因此, 考察 $\dot{H}(x)=0$ 的集合

$$\Omega_0 = \{x | \dot{H}(x)=0, x \in X\} \quad (2.4.3)$$

可知 Ω_0 中的状态轨迹满足 $y=0$ 。由零状态可检测性, 可知 Ω_0 中的状态轨迹满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)=0$ 。故由 LaSalle 不变集定理, 该闭环系统是渐进稳定的。

综上所述, 有如下引理:

引理 2.4.1 设系统 (2.1.5) 是无源的, 且存在光滑可微的正定存储函数 $H(x)$ 满足耗散不等式 (2.1.8)。若该系统是零状态可检测的, 那么使闭环系统在原点 $x=0$ 是渐进稳定的反馈控制器为

$$u = \varphi(x) \quad \varphi(0)=0 \quad (2.4.4)$$

式中, φ 是满足 $y^T \varphi(y) < 0$, $\forall y \neq 0$ 的任意函数。

例 2.4.1 研究系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 (2x_1^2 + 1) + u \\ y = x_2 + x_1^2 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

定义正定函数

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1^2)^2 \quad (2.4.6)$$

则 $H(x_1, x_2)$ 沿系统 (2.4.5) 的轨迹, 有

$$\dot{H}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + (x_2 + x_1^2)(\dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1) \leq yu \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4.7)$$

故该系统是无源的。又当 $y = 0$, $u = 0$ 时, 有 $x_2 = -x_1^2$, 即系统满足

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2(2x_1^2 + 1) \end{cases}$$

显然有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$ 。

所以, 该系统同时满足零状态可检测性。根据引理 2.4.1, 令静态反馈控制律

$$u = -ky \quad k > 0 \quad (2.4.8)$$

则闭环系统在原点 $(0, 0)$ 是渐进稳定的。

2.4.2 KYP 定理^[1]

定理 2.4.1 考察系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.4.9)$$

式中, $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ 为 $m \times m$ 维函数矩阵。

对于系统 (2.4.9), 若存在半正定函数 $H(\mathbf{x})$ 、函数向量 $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, 使得

$$\begin{cases} L_f H(\mathbf{x}) \leq \mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{l}(\mathbf{x}) \\ L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) - 2\mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}) \\ [\mathbf{d}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})]/2 = \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4.10)$$

成立, 则称系统 (2.4.9) 具有 KYP (Kalman Yakubovich Popov, KYP) 特性。

若存在光滑可微的半正定存储函数 $H(\mathbf{x})$, 使得系统 (2.4.9) 是无源系统的充分必要条件是该系统具有 KYP 特性。

证明:

① 充分性。设存在半正定函数 $H(\mathbf{x})$ 及适当维数的函数矩阵 $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ 满足式 (2.4.10)。沿系统 (2.4.9) 的状态轨迹求 $H(\mathbf{x})$ 对时间 t 的微分, 并利用式 (2.4.10) 可得

$$\begin{aligned}
\dot{H}(\mathbf{x}) &= L_f H(\mathbf{x}) + L_g H(\mathbf{x})\mathbf{u} \leqslant -\mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{l}(\mathbf{x}) + [\mathbf{h}^T(\mathbf{x}) - 2\mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x})]\mathbf{u} \\
&= \mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} - [\mathbf{l}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{w}^T(\mathbf{x})][\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{l}(\mathbf{x})] \\
&\leqslant \mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T[\mathbf{d}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{d}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} \\
&= \mathbf{y}^T \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

即耗散不等式

$$\dot{H}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.4.12}$$

对于任意的输入 \mathbf{u} 都成立，故系统 (2.4.9) 是无源的。

② 必要性。假设系统 (2.4.9) 是无源的，且存在光滑可微的存储函数 $H(\mathbf{x})$ 满足

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \triangleq \dot{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^T \mathbf{u} \leqslant 0 \quad \forall t \geqslant 0$$

则沿系统 (2.4.9) 的任意状态轨迹，有

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) &= L_f H(\mathbf{x}) + L_g H(\mathbf{x})\mathbf{u} - [\mathbf{u}^T \mathbf{d}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^T(\mathbf{x})]\mathbf{u} \\
&= L_f H(\mathbf{x}) + [L_g H(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T(\mathbf{x})]\mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{d}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} \leqslant 0
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

显然， V 是关于 \mathbf{u} 的二次函数。因此，存在适当的函数矩阵 $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ ，使得

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = -[\mathbf{l}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{w}^T(\mathbf{x})][\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{l}(\mathbf{x})] \tag{2.4.14}$$

成立。比较式 (2.4.13) 和式 (2.4.14) 中 V 的系数矩阵，可知 $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ 满足式 (2.4.10)，即系统 (2.4.9) 具有 KYP 特性。

如果将式 (2.4.10) 中的不等式换成严格的不等式，即

$$L_f H(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \tag{2.4.15}$$

式中， $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0 (\mathbf{x} \neq 0)$ 为正定矩阵函数。

则称系统 (2.4.9) 具有严格 KYP 特性。

当 $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = 0$ 时，式 (2.4.10) 中的 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ 可取零矩阵，KYP 特性的条件可简化为

$$\begin{cases} L_f H(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{l}^T(\mathbf{x})\mathbf{l}(\mathbf{x}) \\ L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

2.4.3 相对阶与无源性^[2, 10, 11]

定理 2.4.2 对于仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.4.17}$$

$\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 满秩, 则能够进行无源化且具有正定存储函数 $H(\mathbf{x})$ 的充分必要条件是系统相对阶为 $\{1, 1, \dots, 1\}$ 并且是弱最小相位的。

证明:

① 必要性。若系统 (2.4.17) 无源, 则系统具有 KYP 特性, 有 $L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x})$, 于是

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.4.18)$$

由于 $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 满秩, 则 $L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq 0$, 根据第 1 章中相对阶的定义, 系统的相对阶为 $\{1, 1, \dots, 1\}$ 。

若系统零动态是稳定的, 系统就为弱最小相位的。下面考察无源系统的零动态稳定性。系统 (2.4.17) 的零动态满足

$$L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4.19)$$

② 充分性。由于系统是无源的, 则有

$$\dot{H} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y} = \mathbf{u}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4.20)$$

于是有

$$\dot{H} = L_f H + L_g H u = L_f H \leq 0 \quad (2.4.21)$$

式 (2.4.21) 表明系统在集合 $\{\mathbf{x} | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ 是零动态稳定的, 故系统是弱最小相位的。

由于仿射非线性系统的相对阶为 $\{1, 1, \dots, 1\}$, 则存在坐标变换 $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x})]$ 使系统变为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.4.22)$$

式中, $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_f \mathbf{z}$, $\mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_g \mathbf{z}$, $\mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_f \mathbf{y}$, $\mathbf{k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_g \mathbf{y}$ 。

由于 $\mathbf{k}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 为非奇异的, 则系统 (2.4.22) 可进一步通过反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})(-\mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{v}) \quad (2.4.23)$$

使系统变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.4.24)$$

式中, $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ 。

由于 $\bar{q}(z, y)$ 是光滑的向量场, 则有

$$\bar{q}(z, y) = \bar{q}(z, 0) + \int_0^1 \frac{\partial \bar{q}(z, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=sy} y ds \quad (2.4.25)$$

式 (2.4.25) 的证明如下:

设 $y=0$ 时系统 $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = v \end{cases}$ 子系统在 $x=0$ 是渐进稳定的, 即 $x=0$ 是系统

$\dot{x} = f^*(x) = f^*(x, 0)$ 渐进稳定的平衡点。令 $f_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f(z, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=sy} ds$, 则有

$$f_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=sy} ds = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{y} (f(x, y) - f(x, 0))$$

$$f(x, y) = f(x, 0) + f_1(x, y)y$$

证毕。

进一步作变换 $z = \eta - \bar{q}(z, 0)y$, 则系统 (2.4.24) 变换为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \tilde{f}(\eta, y) + \left(\sum_{i=1}^m q_i(\eta, y) y_i \right) v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (2.4.26)$$

由于 $\tilde{f}(\eta, y)$ 是光滑的, 从而有

$$\tilde{f}(\eta, y) = \tilde{f}(\eta, 0) + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}(\eta, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=sy} y ds \quad (2.4.27)$$

系统 (2.4.26) 可以改写成

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_{zd}(\eta) + \bar{f}(\eta, y)y + \left[\sum_{i=1}^m q_i(\eta, y) y_i \right] v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (2.4.28)$$

式中, $f_{zd}(\eta) = \tilde{f}(\eta, 0)$, $\bar{f}(\eta, y) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{q}(z, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=sy} ds$ 。

设半正定函数 $W(\eta) \in C^1$ 是系统 (2.4.28) 的零动态子系统的 Lyapunov 函数, 即有 $L_{f_{zd}} W \leq 0$ 。取 $H(\eta, y) = W(\eta) + \frac{1}{2} y^T y$, 则 $H(\eta, y)$ 沿系统 (2.4.28) 的导数有

$$\begin{aligned} \dot{H}(\eta, y) &= L_{f_{zd}} W + L_{\bar{f}} W y + \sum_{i=1}^m L_{q_i} W y_i + y^T v \\ &= L_{f_{zd}} W + L_{\bar{f}} W y + y^T [I + M(z, y)] v \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

式中, $\mathbf{M}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{q}_1} W & L_{\tilde{q}_2} W & \cdots & L_{\tilde{q}_m} W \end{pmatrix}^T$ 。

根据式 (2.4.29) 取反馈控制律

$$\mathbf{v} = (\mathbf{I} + \mathbf{M}(\mathbf{z}, \mathbf{y}))^{-1} \left[-(\mathbf{L}_{\tilde{f}} W)^T + \mathbf{w} \right] \quad (2.4.30)$$

于是可得

$$\dot{H}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) = L_{f_{sd}} W + \mathbf{y}^T \mathbf{w} \quad (2.4.31)$$

从而系统从新的输入 \mathbf{w} 到输出 \mathbf{y} 关于存储函数 $H(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})$ 是无源的。

2.4.4 鲁棒无源性^[1]

当系统存在不确定性时, 如果在无源化过程中所构造的存储函数仍能够保证无源性, 就可设计能够保证闭环系统鲁棒稳定性的控制器。

考虑具有不确定性的系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4.32)$$

式中, $\mathbf{f}(0) = 0$; $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 表示系统的不确定性, 且假设 $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 可以由已知的函数矩阵 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 及未知的函数向量 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$ 描述为

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \quad (2.4.33)$$

而 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$ 则属于如下定义的函数集合

$$\Omega = \{ \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \mid \|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \} \quad (2.4.34)$$

式中, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为已知函数向量, 描述了未知函数的上界; $\|\bullet\|$ 是函数向量的 Euclidean 范数。

定义 2.4.1 对于系统 (2.4.32), 若存在存储函数 $H(\mathbf{x})$, 使得 KYP 特性条件

$$\begin{cases} L_{f+\Delta f} H(\mathbf{x}) \leq 0 \\ L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4.35)$$

对于任意的 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega$ 成立, 则称该系统是鲁棒无源的。对于鲁棒无源系统, 若存在正定函数 $Q(\mathbf{x})$, 使得

$$L_{f+\Delta f} H(\mathbf{x}) \leq -Q(\mathbf{x}) \quad \forall \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega \quad (2.4.36)$$

成立, 则称系统 (2.4.32) 是严格鲁棒无源的。

由于 (2.4.35) 中含有未知函数向量 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$, 根据 KYP 特性条件 (2.4.35) 来判断系统的鲁棒无源性是不容易做到的。对此, 下面的定理给出了鲁棒无源性的充分必要条件。

定理 2.4.3 系统 (2.4.32) 对于半正定的存储函数 $H(\mathbf{x})$ 是鲁棒无源的，当且仅当 $H(\mathbf{x})$ 满足条件

$$\begin{cases} L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \leq 0 \\ L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4.37)$$

式中， $L_e^T H(\mathbf{x}) = [L_e H(\mathbf{x})]^T$ 。

证明：系统 (2.4.32) 对于半正定的存储函数 $H(\mathbf{x})$ 是鲁棒无源的，那么， $H(\mathbf{x})$ 必须满足 $L_g H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x})$ 。因此，以下只证明不等式

$$L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \leq 0 \quad (2.4.38)$$

成立的充分必要性。

① 充分性。根据 Cauchy 不等式及 $\|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|$ ， $\forall \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，显然有

$$L_e H(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \leq \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \cdot \|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\| \leq \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|$$

所以

$$L_{f+\Delta f} H(\mathbf{x}) = L_f H(\mathbf{x}) + L_e H(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.4.39)$$

充分性得证。

② 必要性。设系统 (2.4.32) 对于半正定存储函数 $H(\mathbf{x})$ 是鲁棒无源的，即 $\forall \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，式 (2.4.35) 成立。

记 $\alpha(\mathbf{x}) = L_f H(\mathbf{x})$ ， $\beta^T(\mathbf{x}) = L_e H(\mathbf{x})$ ，那么，由式 (2.4.32) 可得

$$L_{f+\Delta f} H(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.4.40)$$

故有

$$\alpha(\mathbf{x}) \leq \inf_{\boldsymbol{\delta} \in \Omega} \{-\beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\} = -\sup_{\boldsymbol{\delta} \in \Omega} \{\beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\}$$

根据集合 Ω 的定义可知，对于任意 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，取 $\boldsymbol{\delta}'(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$ ，则 $\boldsymbol{\delta}'(\mathbf{x}) \in \Omega$ 。所以，由上式可得

$$\alpha(\mathbf{x}) \leq -\sup_{\boldsymbol{\delta} \in \Omega} \{\beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\} \quad (2.4.41)$$

又因为 $\forall \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，不等式 $\|\beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\| \leq \|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\| \leq \|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|$ 成立，所以有

$$\sup_{\boldsymbol{\delta} \in \Omega} \{\beta^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})\} \leq \|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \quad (2.4.42)$$

并且，当 $\beta(\mathbf{x}) \neq 0$ 时，若取 $\boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|}{\|\beta(\mathbf{x})\|} \beta(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，则有

$$\left| \beta^T(\mathbf{x}) \delta_0(\mathbf{x}) \right| = \|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \quad (2.4.43)$$

当 $\beta(\mathbf{x})=0$ 时, $\forall \delta(\mathbf{x}) \in \Omega$, 上式都成立。由式 (2.4.41)、式 (2.4.42) 得

$$\alpha(\mathbf{x}) \leq -\sup_{\delta \in \Omega} \left| \beta^T(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}) \right| = -\|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|$$

$$\text{即} \quad \alpha(\mathbf{x}) + \|\beta(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| = L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \leq 0 \quad (2.4.44)$$

成立, 从而式 (2.4.37) 得证。

推论 2.4.1 系统 (2.4.32) 对于存储函数 $H(\mathbf{x})$ 是严格鲁棒无源的, 当且仅当存在正定函数 $Q(\mathbf{x})$, 使得

$$\begin{cases} L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e^T H(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \leq -Q(\mathbf{x}) \\ L_g H(\mathbf{x}) = h^T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4.45)$$

成立。

根据无源性与稳定性的关系可知, 鲁棒无源性意味着鲁棒稳定性, 即如果系统 (2.4.32) 对于正定存储函数 $H(\mathbf{x})$ 是严格鲁棒无源的, 则根据定义 2.4.1 可知, 一定存在正定函数 $Q(\mathbf{x})$, 使得

$$L_{f+\Delta f} H(\mathbf{x}) \leq -Q(\mathbf{x}) \quad (2.4.46)$$

成立。实际上, 这个不等式正是系统 (2.4.32) 当 $\mathbf{u}=0$ 时的自由系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.4.47)$$

在 $\mathbf{x}=0$ 是鲁棒渐进稳定的充分条件。所以推论 2.4.1 给出该自由系统鲁棒稳定性的一个判据。关键是如何构造满足式 (2.4.45) 的 $H(\mathbf{x})$ 。

定理 2.4.4 正定存储函数 $H(\mathbf{x})$ 和正定 $Q(\mathbf{x})$ 满足式 (2.4.45) 的充分必要条件是存在适当的正值函数 $\lambda(\mathbf{x})$, 使得 HJI 不等式

$$L_f H(\mathbf{x}) + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2} \|L_e^T H(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{2\lambda(\mathbf{x})} \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|^2 + Q(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.4.48)$$

成立。证明见参考文献[1]。

例 2.4.1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + x\delta(x) + u \\ y = x \end{cases} \quad (2.4.49)$$

用系统 (2.4.32) 的记号, 则 $f(x) = -x^3$, $e(x) = x$, $g(x) = 1$ 。设未知函数 $\delta(x)$ 的界定给定为 $n(x) = \rho x^2$, 其中, ρ 为常数, 且 $0 < \rho \leq 1$ 。

取正定存储函数 $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} x^2$, 满足鲁棒无源性条件, 即

$$\begin{cases} L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e H(\mathbf{x})\| \bullet \|n(x)\| = -x^4 + x^2 \rho x^2 = -(1-\rho)x^4 \\ L_g H(\mathbf{x}) = x = h(x) \end{cases}$$

故若 $\rho=1$ ，则有 $L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e H(\mathbf{x})\| \bullet \|n(x)\| = 0$ 。所以，根据定理 2.4.3，该系统 (2.4.49) 是鲁棒无源的。

若 $\rho=1-\varepsilon$ ， $\varepsilon(|\varepsilon|<1)$ 为正常数，则 $L_f H(\mathbf{x}) + \|L_e H(\mathbf{x})\| \bullet \|n(x)\| = -\varepsilon x^4$ 。

令 $Q(\mathbf{x}) = \varepsilon x^4$ ，则系统满足严格鲁棒无源性条件 (2.4.45)。

实际上，沿系统 (2.4.49) 的轨迹

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = x(-x^3 + x\delta(x) + u) = -x^2(x^2 - \delta(x)) + xu$$

显然，对任意满足 $\delta(x) \leq x^2$ 的 $\delta(x)$ ，有 $\dot{H}(\mathbf{x}) \leq yu, \forall t \geq 0$ ；而对于任意满足 $|\delta(x)| \leq (1-\varepsilon)x^2$ 的 $\delta(x)$ ，有 $\dot{H}(\mathbf{x}) \leq -\varepsilon x^4 + yu, \forall t \geq 0$ 。

第3章 基于无源性的系统设计

本章主要给出基于无源性的仿射非线性系统控制器设计方法（反馈无源化控制器和鲁棒无源控制器）及自适应无源控制器设计方法。

3.1 反馈无源化控制器设计

3.1.1 状态反馈无源化控制器设计^[12]

首先考虑仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

的反馈无源化问题。其目的是寻找光滑状态反馈

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.1.2)$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{y}$ 是无源的，其中函数 $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ 可逆。

根据仿射非线性系统的 KYP 定理立即可知，这就等价于寻找反馈 (3.1.2) 使得存在半正定函数 $H(\mathbf{x}) \geq 0$ ， $H(0) = 0$ ，满足

$$\begin{cases} L_{f+g\boldsymbol{\alpha}}H(\mathbf{x}) \leq 0 \\ L_{g\boldsymbol{\beta}}H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

然而，直接根据式 (3.1.4) 来求取式 (3.1.3) 中的函数 $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 是困难的。直到 1991 年 Byrnes 等人结合了非线性系统的几何理论，针对这一问题的讨论才有了比较完善的解答。根据非线性系统的几何理论，光滑反馈不能改变系统的相对阶和零动态，而一个具有 C^2 正定存储函数的无源系统在相对阶存在等条件下，它必然是相对阶为 1 且是弱最小相位的，因此，这两个条件也就成为系统能反馈无源的必要条件。同时，当上述条件满足时，参考文献[11]中指出，在假设全局定义的正则型存在的条件下，将该仿射系统化为所谓的正则型，即系统 (3.1.1) 通过状

态变换为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + p(z, y) + \left[\sum_{i=1}^p q_i(z, y) y_i \right] u \\ \dot{y} = h(z, y) + k(z, y) u \end{cases} \quad (3.1.5)$$

的情况下, 给出了系统 (3.1.5) 可通过光滑状态反馈无源化且具有 C^2 正定存储函数的充分条件是系统 (3.1.5) 是弱最小相位的。

根据定理 2.4.2 可得系统的无源化控制律为

$$v = (I + M(z, y))^{-1} \left[- (L_{\bar{f}} H)^T + w \right] \quad (3.1.6)$$

式中, $M(z, y) = (L_{\bar{q}_1} W \quad L_{\bar{q}_2} W \quad \cdots \quad L_{\bar{q}_m} W)^T$, $\bar{q}(z, y) = \bar{q}(z, 0) + \int_0^1 \frac{\partial \bar{q}(z, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=zy} y ds$,

$\bar{f}(z, y) = f(z, y) - q(z, y)k^{-1}(z, y)h(z, y)$, $k(z, y) = L_g y$ 。

虽然通过光滑状态反馈在参考文献[11]中基本得到了解决, 可是它所提出的条件还是限制了不少非线性系统的无源化应用。

例 3.1.1 一个简单系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 u \\ y = x_2^2 \end{cases}$$

在 $u = -1 + v$ 控制下即可使系统无源, 存储函数为 $H(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ 。但是系统在 $x_2 = 0$ 时, 没有相对阶的定义。

例 3.1.2 系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1 + 1)u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$u = -y + v$ 同样使系统关于 $H(x)$ 无源, 但是无法状态变换将其转化为形如式 (3.1.5) 的正则标准型。这可以看出, 非线性系统反馈无源化问题并没有得到令人满意的结果, 在相对阶没有定义或者无法转化为标准型的情况下, 还是有许多问题亟待解决。

3.1.2 输出反馈无源化控制器设计

在实际控制问题中, 系统的状态并非都是可测的, 所以需要构造输出反馈控制

器来达到控制目的。对于仿射非线性系统 (3.1.1)，若可以输出反馈无源，那么存在光滑反馈控制律

$$u = \alpha(y) + \beta(y)v \quad (3.1.7)$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(y) + g(x)\beta(y)v \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$v \mapsto y$ 是无源的，其中函数 $\beta(y)$ 可逆。

若仿射非线性系统 (3.1.1) 的相对阶为 1 且是弱最小相位的，那么它可以写成式 (3.1.5) 的标准形式，即改写为

$$\begin{cases} \dot{z} = q_0(z) + q_1(z, y)y \\ \dot{y} = b(z, y) + a(z, y)u \end{cases} \quad (3.1.9)$$

并做如下假设：

假设 3.1.1 $a_1^T(z) = a_1^T(z) > 0$ 和 $a_0(z)$ ，使得 $a(z, \tilde{y}) = a_1(z)a_0(\tilde{y})$ ，而且 $a_0(z)$ 对 $\forall y \in R^m$ 都是可逆的。

假设 3.1.2 系统 (3.1.1) 是全局弱最小相位的，即存在 C^r 正定函数 $H_0(z)$ ， $r \geq 2$ ，使得 $L_{q_0}H_0(z) < 0$ 对 $\forall z$ 都成立。

假设 3.1.3 在两个非负函数 φ_1 和 φ_2 ，对所有 $z \in R^{n+p-1}$ 和 $y \in R^m$ 满足

$$\left| L_{q_1}^T H_0(z, y) + b(z, y) + \bar{a}_1^{-1}(z, y)y \right| \leq \varphi_1(y)|y| + \varphi_2(y) \left| L_{q_0} H(z) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.10)$$

式中， $\bar{a}_1^{-1}(z, y) = \left[\nabla(a_1^{-1})_{ij}(z)\dot{z} \right]_{m \times m}$ 。

定理 3.1.1^[13] 若仿射非线性系统 (3.1.1) 的相对阶为 1 且是弱最小相位的，且满足假设 3.1.1~假设 3.1.3，那么如下输出反馈控制律

$$u = a_0^{-1}(y) \left[-\varepsilon y - y\varphi_1(y) - y\varphi_2^2(y) + r \right] \quad (3.1.11)$$

可使系统 $r \mapsto y$ 无源。

注意：该结果的假设条件仅仅是输出反馈无源的充分条件，而且控制律仅仅是静态的。

3.2 鲁棒无源控制器设计

3.2.1 系统模型变换

对于具有不确定性的系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

设计反馈控制器

$$\mathbf{u} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (3.2.2)$$

使闭环系统对任意的 $\delta(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，在原点 $\mathbf{x} = 0$ 是渐进稳定的。

根据无源性和稳定性的关系可知，如果能找到适当的坐标变换

$$\xi = \psi(\mathbf{x}) \quad (3.2.3)$$

和状态反馈

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (3.2.4)$$

使得系统 (3.2.1) 与鲁棒无源系统是反馈等价的，那么令

$$\mathbf{v} = -\mathbf{y} \quad (3.2.5)$$

即可得鲁棒镇定控制器。这时，对于任意 $\delta(\mathbf{x}) \in \Omega$ ，存储函数 $H(\mathbf{x})$ 满足 $H(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{y}^T \mathbf{y}$ 。

当 $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ 时，假设系统 (3.2.1) 具有相对阶 1，即

$$L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in R^n \quad (3.2.6)$$

则在一定的几何条件下，存在适当的函数 $t_1(\mathbf{x}), t_2(\mathbf{x}), \dots, t_{n-1}(\mathbf{x})$ ，使得坐标变换

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \psi(\mathbf{x}) \quad (3.2.7)$$

是微分同胚的。式 (3.2.7) 中 $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (t_1(\mathbf{x}), t_2(\mathbf{x}), \dots, t_{n-1}(\mathbf{x}))^T$ ，且在新的坐标下，系统 (3.2.1) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \mathbf{y})\tilde{\delta}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{b}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}_1(\mathbf{z}, \mathbf{y})\tilde{\delta}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

式中， $\mathbf{f}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_f \mathbf{T}[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_e \mathbf{T}[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\mathbf{b}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_f \mathbf{h}[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\mathbf{b}_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_e \mathbf{h}[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = L_g \mathbf{h}[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\tilde{\delta}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta[\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})]$ ， $\psi^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$ 表示 ψ 的逆函数。

3.2.2 鲁棒无源控制器设计方法^[1]

对于 $\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \neq 0$ （非奇异矩阵），令

$$\mathbf{u} = \alpha^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y})[\mathbf{v} - \mathbf{b}_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})] \quad (3.2.9)$$

则式 (3.2.8) 和式 (3.2.9) 构成的系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = f_0(z, y) + f_1(z, y)\tilde{\delta}(z, y) \\ \dot{y} = v + b_1(z, y)\tilde{\delta}(z, y) \end{cases} \quad (3.2.10)$$

因此, 通过求使得系统 (3.2.10) 在原点 $(z, y) = (0, 0)$ 渐进稳定的反馈控制律为

$$v = c'(z, y) \quad (3.2.11)$$

就可求得系统 (3.2.1) 的鲁棒稳定性问题。因为, 根据坐标变换的微分同胚性, 如果系统 (3.2.10) 和反馈律 (3.2.11) 在原点 $(z, y) = (0, 0)$ 是鲁棒稳定的, 那么式 (3.2.9) 及式 (3.2.11) 可以得到原系统 (3.2.1) 在原点 $x = 0$ 鲁棒稳定的反馈控制律为 $u = \alpha^{-1}(z, y)[c'(z, y) - b_0(z, y)]$ 。系统 (3.2.10) 的输出 $y = 0$ 的零动态为

$$\dot{z} = f_0^*(z) + f_1^*(z)\tilde{\delta}(z, 0) \quad (3.2.12)$$

式中, $f_0^*(z) = f_0(z, 0)$, $f_1^*(z) = f_1(z, 0)$ 。

定理 3.2.1 考虑系统 (3.2.10), 如果对于零动态 (3.2.12), 存在正定函数 $W(z)$ 及正定函数 $Q_0(z)$, 使得

$$L_{f_0^*}W(z) + L_{f_1^*}W(z)\tilde{\delta}(z, 0) \leq -Q_0(z) \quad \forall z \quad (3.2.13)$$

对任意 $\delta(x) \in \Omega$ 成立。那么, 使闭环系统成为无源的反馈控制律为

$$v = -L_{f_0}^T W(z) - \frac{\lambda(z)}{2} C_2(z, y) - \frac{1}{2\lambda(z)} C_3(z, y) + v' \quad (3.2.14)$$

式中, v' 为新的控制输入; $\lambda(z) > 0$ 是适当的正值函数, 且

$$C_2(z, y) = 2[\tilde{f}_1(z, y) + b_1(z, y)]L_{f_1}^T W(z) + [\tilde{f}_1(z, y) + b_1(z, y)][\tilde{f}_1(z, y) + b_1(z, y)]^T y,$$

$$C_3(z, y) = \tilde{n}^T(z, y)\{2n[\psi^{-1}(z, 0)] + \tilde{n}(z, y)y\}, \quad \tilde{f}_0(z, y) = \int_0^1 \frac{\partial f_0(z, \xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=\theta y} d\theta,$$

$$\tilde{f}_1^T(z, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f_1^T(z, \xi) \frac{\partial^T W}{\partial z} \right] \bigg|_{\xi=\theta y} d\theta, \quad \tilde{n}(z, y) = \int_0^1 \frac{\partial n[\psi^{-1}(z, \xi)]}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=\theta y} d\theta.$$

证明见参考文献[1]。

实际上, 如果存在满足式 (3.2.13) 的正定函数 $W(z)$ 及 $Q_0(z)$, 那么系统 (3.2.10) 的零动态对于不确定性 $\delta(x) \in \Omega$ 是鲁棒稳定的。所以, 根据无源性和稳定性的关系, 在反馈控制律 (3.2.14) 中, 令

$$v' = -y \quad (3.2.15)$$

即得系统 (3.2.10) 的鲁棒稳定控制器

$$v = C(z, y) - y \quad (3.2.16)$$

例 3.2.1 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 + x_3 \delta(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (3.2.17)$$

式中, u_1 、 u_2 为控制输入量; $\delta(x_1, x_2, x_3)$ 为未知函数, 且满足

$$\begin{cases} \|\delta(x_1, x_2, x_3)\| \leq \|n(x_3)\|, \forall x_i (i=1, 2, 3) \\ n(x_3) = kx_3^3 \end{cases} \quad (3.2.18)$$

式中, k 为满足 $0 < k < 1$ 的给定常数。

为设计鲁棒无源控制器, 首先对系统构造二维的输出函数

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3^2 \end{cases} \quad (3.2.19)$$

记

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3^2 \end{pmatrix}, \quad \text{则系}$$

统 (3.2.17)、系统 (3.2.19) 可表示为式 (3.2.1) 的形式。

计算李导数

$$L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

即该系统具有相对阶 $\{1, 1\}$ 。实际上, 取 $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_3$, 并选取坐标变换

$$\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

及状态反馈

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} + \mathbf{v} \quad (3.2.22)$$

在新的坐标系下, 系统 (3.2.17) 表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^3 + (z^2 + y_2 - z) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + z \tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} + \begin{pmatrix} z \\ -2z^2 \end{pmatrix} \tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (3.2.23)$$

$$\text{式中, } \tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta \left[\boldsymbol{\psi}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \right], \quad \tilde{n}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = n \left[\boldsymbol{\psi}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \right] = kz^2, \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

且不确定函数 $\tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 满足 $\|\tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq \|\tilde{n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$ 。

与定理 3.2.1 的记号相对应, 有

$$\mathbf{f}_0(z, \mathbf{y}) = -z^3 + \begin{pmatrix} z^2 + y_2 & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(z, \mathbf{y}) = z, \quad \mathbf{b}_1(z, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} z \\ -2z^2 \end{pmatrix}$$

当 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 时, 该系统的零动态为

$$\dot{z} = -z^3 + z\tilde{\delta}(z, \mathbf{0})$$

即 $f_0^*(z, \mathbf{y}) = -z^3$, $f_1^*(z, \mathbf{y}) = z$ 。因此, 正定函数 $W(z) = \frac{1}{2}z^2$ 满足不等式

$$\begin{aligned} L_{f_0} W(z) + \frac{\lambda(z)}{2} \left\| L_{f_1}^T W(z) \right\|^2 + \frac{1}{2\lambda(z)} \left\| n(\boldsymbol{\psi}^{-1}(z, \mathbf{0})) \right\|^2 &= \frac{\partial W}{\partial z}(-z^3) + \frac{\lambda(z)}{2} \frac{\partial W}{\partial z} z^2 \frac{\partial W}{\partial z} \\ &+ \frac{1}{2\lambda(z)} k^2 z^4 = -z^4 + \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{2} k^2 z^4 \leq -\frac{1}{2}(1-k^2)z^4 = -Q(z) \end{aligned}$$

其中, $Q(z) = \frac{1}{2}(1-k^2)z^4 > 0$ 是正定函数, $\lambda = 1$, 因此有

$$\frac{\partial W}{\partial z}(-z^3 + z\tilde{\delta}(z, \mathbf{0})) \leq -Q_0(z) \quad (3.2.24)$$

对任意的 $\tilde{\delta}$ 成立, 即 $W(z)$ 满足定理 3.2.1 的条件。

利用式 (3.2.10) 的记号, 该系统为

$$\tilde{\mathbf{f}}_0(z, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} z^2 + y_2 & -z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_1(z, \mathbf{y}) = 0, \quad n[\boldsymbol{\psi}^{-1}(z, \mathbf{0})] = kz^2, \quad \tilde{n}_1(z, \mathbf{y}) = 0$$

所以, 根据定理 3.2.1 求得鲁棒无源控制律为

$$\begin{cases} C_2(z, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2z^2 + zy_1 & -2z^2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ -2z^2 \end{pmatrix} \\ C_3(z, \mathbf{y}) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}(z, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{y} = -L_{f_0}^T W - \frac{\lambda}{2} C_3(z, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{y} = - \begin{pmatrix} 2z^3 + \frac{1}{2} z^2 y_1 + (1-z^2)zy_2 \\ -z^2 - 2z^4 - z^3 y_1 + 2z^4 y_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{y}$$

即系统 (3.2.17) 的无源鲁棒控制器为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z^3 + \frac{1}{2} z^2 y_1 + (1-z^2)zy_2 \\ -z^2 - 2z^4 - z^3 y_1 + 2z^4 y_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

其中, $z = x_3$, $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_2 - x_3^2$ 。

3.3 自适应无源控制器设计

3.3.1 不确定系统的无源化问题

一个仿射非线性系统能通过光滑反馈无源的充要条件是其相对阶为 1 且是零动态稳定的。因此, 在很大程度上一个含未知参数的系统能通过反馈无源化的一个必要条件是系统能转化为如下标准形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = f_{zd}(z, \theta) + p(z, y, \theta)y \\ \dot{y} = a(z, y, \theta) + b(z, y, \theta)u \end{cases} \quad (3.3.1)$$

下面直接针对系统 (3.3.1) 来讨论含未知参数的不确定系统的无源化问题。为使描述简单化, 引入以下定义:

定义 3.3.1 称系统 (3.3.1) 为可自适应无源化的, 若存在自适应反馈控制

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \psi(z, y, \xi, v) \\ \dot{y} = \varphi(z, y, \xi, v) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

使得闭环系统从新的输入 v 到输出 y 是无源的。

假设 3.3.1 对任意 z, y, θ , 函数 $b(z, y, \theta)$ 可逆且存在函数 $b_0(z, y)$ 和 $b_1(z, y)$ 满足

$$b(z, y, \theta) = b_0(z, y) + b_1(z, y)\theta \quad (3.3.3)$$

假设 3.3.2 存在正定函数 $W(z) \in C^1$ 满足

$$L_{f_{zd}} W(z, \theta) \leq 0 \quad (3.3.4)$$

式中, $L_{f_{zd}} W(z, \theta) = \frac{\partial W(z, \theta)}{\partial z} f_{zd}(z, \theta)$ 表示 $W(z, \theta)$ 沿 $f_{zd}(z, \theta)$ 的李导数。

假设 3.3.3 存在函数 $p_0(\cdot)$, $p_1(\cdot)$, $a_0(\cdot)$, $a_1(\cdot)$, 满足

$$\begin{cases} \|\Delta_p\| \leq \bar{\rho}_1(z, y) \\ \|\Delta_\alpha\| \leq \rho_2(z, y) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

式中, $\bar{\rho}_1(\cdot)$ 、 $\rho_2(\cdot)$ 为已知非负函数; Δ_p 、 Δ_α 定义为

$$\begin{cases} \Delta_p \triangleq p(z, y, \theta) - p_0(z, y) - p_1(z, y)\theta \\ \Delta_\alpha \triangleq a(z, y, \theta) - a_0(z, y) - a_1(z, y)\theta \end{cases} \quad (3.3.6)$$

3.3.2 自适应无源控制器设计方法

定理 3.3.1 若假设 3.3.1~假设 3.3.3 成立, 则系统 (3.3.1) 是可自适应无源化的。此时相应的自适应律和控制律^[14]为

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \boldsymbol{\xi})^{-1} \left\{ [L_{p0} W(\mathbf{z})]^T + \mathbf{a}_0 + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \left[[L_{p1} W(\mathbf{z})]^T + \mathbf{a}_1 \right] \boldsymbol{\xi} - \mathbf{v} \right\} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \mathbf{y}^T \left[[L_{p1} W(\mathbf{z})]^T + \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{u} \right] \end{cases} \quad (3.3.7)$$

式中, 当 $\mathbf{y} = 0$ 时, $\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \triangleq 0$; 非负函数满足

$$\rho_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \geq \bar{\rho}_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \left\| \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right\| \quad (3.3.8)$$

证明 取正定连续可微函数

$$V(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = W(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta})^2$$

则 $V(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ 沿系统 (3.3.1) 关于时间的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= L_{f_{sd}} W(\mathbf{z}) + L_{p0} W(\mathbf{z}) \mathbf{y} + L_{p1} W(\mathbf{z}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{y} + \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Delta_p \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{y}^T \Delta_a \\ &\quad + \mathbf{y}^T (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\xi} = L_{f_{sd}} W(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T (L_{p0} W(\mathbf{z}) + L_{p1} W(\mathbf{z}) \boldsymbol{\theta}) \\ &\quad + \mathbf{y}^T (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} + \mathbf{y}^T \mathbf{b}_1 (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

将式 (3.3.7) 代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= L_{f_{sd}} W(\mathbf{z}) + \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Delta_p \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \Delta_a - \|\mathbf{y}\| (\rho_1 + \rho_2) + \mathbf{y}^T \mathbf{v} \\ &\quad + \mathbf{y}^T \left[(L_{p1} W(\mathbf{z}))^T + \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{u} \right] (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\xi} = L_{f_{sd}} W(\mathbf{z}) \\ &\quad + \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Delta_p \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \Delta_a - \|\mathbf{y}\| (\rho_1 + \rho_2) + \mathbf{y}^T \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

又由假设 3.3.3 和式 (3.3.8) 得

$$\frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Delta_p \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \Delta_a - \|\mathbf{y}\| (\rho_1 + \rho_2) + \mathbf{y}^T \mathbf{v} \leq 0 \quad (3.3.10)$$

根据式 (3.3.9) 和式 (3.3.10) 有

$$\dot{V} \leq L_{f_{sd}} W(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T \mathbf{v} \quad (3.3.11)$$

从而由假设 3.3.2 知, 系统 (3.3.1) 在反馈 (3.3.7) 下从新的输入 \mathbf{v} 到输出 \mathbf{y} 是无源的。

根据定理 3.3.1, 由无源系统理论可知系统 (3.3.1) 在无源化控制律 (3.3.7) 下, 进一步引入任何输出严格无源的系统作负反馈后是输入输出稳定的。从而有如下推论。

推论 3.3.1 若假设 3.3.1~假设 3.3.3 满足, 且系统 (3.3.1) 是零状态可检测的, 则对任意正数 κ , 自适应反馈律 (3.3.7) 中取 $\mathbf{v} = -\kappa\mathbf{y}$ 可以全局渐近镇定系统 (3.3.1)。

在定理 3.3.1 中, 假设 3.3.1 要求系统 (3.3.1) 中控制项前面系数 $\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ 恰好为 $\boldsymbol{\theta}$ 的线性函数。当这一条件不能满足时, 通过自适应反馈使系统无源化一般是不可能的。但对单输入单输出系统, 类似推论 3.3.1 的渐近镇定结论仍可以得到, 此时需要将假设 3.3.1 作如下更改:

假设 3.3.4 存在正数 α, β 满足 $0 < \alpha \leq \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \leq \beta$ 。

下面求自适应反馈控制使得它和系统 (3.3.1) 组成的闭环系统渐近镇定。由于 $W(\mathbf{z})$ 、 p_0 、 a_0 、 p_1 、 a_1 均为已知函数, 从而存在非负函数 ρ_3 、 ρ_4 满足

$$\begin{cases} \|L_{p_0}W(\mathbf{z}) + a_0\| \leq \rho_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \|L_{p_1}W(\mathbf{z}) + a_1\| \leq \rho_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (3.3.12)$$

仍取正定连续可微函数

$$V(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}) = W(\mathbf{z}) + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta})^2$$

则 $V(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$ 沿系统 (3.3.1) 关于时间的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= L_{f_{sd}}W(\mathbf{z}) + L_{p_0}W(\mathbf{z})\mathbf{y} + L_{p_1}W(\mathbf{z})\boldsymbol{\theta}\mathbf{y} + \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\Delta_p\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(a_0 + a_1\boldsymbol{\theta}) \\ &\quad + \mathbf{y}^T\Delta_a + \mathbf{y}^T\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\xi} = L_{f_{sd}}W(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T[a_0 + L_{p_0}W(\mathbf{z})] \\ &\quad + \mathbf{y}^T\Delta_a + \frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\Delta_p\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(a_1 + L_{p_1}W(\mathbf{z}))\boldsymbol{\theta} \\ &\quad + \mathbf{y}^T\frac{\alpha + \beta}{2}\left[1 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}}\right]\mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$$\text{取} \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \mathbf{y}^T(a_1 + L_{p_1}W(\mathbf{z})) \quad (3.3.14)$$

则式 (3.3.13) 变换为

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & L_{f_{zd}} W(z) + \mathbf{y}^T [a_0 + L_{p_0} W(z)] + \frac{\partial W(z)}{\partial \mathbf{z}} \Delta_p \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \Delta_a \mathbf{y}^T [a_1 + L_{p_1} W(z)] \xi \\
& + \mathbf{y}^T \left[1 + \frac{b(z, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}} \right] \frac{\alpha + \beta}{2} \mathbf{u} \leq L_{f_{zd}} W(z) \\
& + \|\mathbf{y}\| (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 |\xi|) \\
& + \mathbf{y}^T \left[1 + \frac{b(z, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}} \right] \frac{\alpha + \beta}{2} \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

又根据假设 3.3.4 有

$$1 + \frac{b(z, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}} \geq 1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} > 0 \tag{3.3.16}$$

从而取

$$\mathbf{u} = -\frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4}{\alpha} \text{sgn}(\mathbf{y}) + \frac{2}{\alpha + \beta} \mathbf{v} \tag{3.3.17}$$

代入式 (3.3.15) 即得

$$\dot{V} \leq L_{f_{zd}} W(z) + \left[1 + \frac{b(z, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}} \right] \mathbf{y} \mathbf{v} \tag{3.3.18}$$

由式 (3.3.18) 无法得到从 \mathbf{v} 到 \mathbf{y} 无源的结论，但对比式 (3.3.18) 和式 (3.3.11) 即知，其稳定控制结论相仿。

定理 3.3.2 若假设 3.3.2~假设 3.3.4 满足，则对任意正数 κ ，在自适应律 (3.3.14) 和反馈律 (3.3.17) 中取 $\mathbf{v} = -\kappa \mathbf{y}$ 即可全局渐近镇定零状态可检测系统 (3.3.1)。

例 3.3.1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{z} = \theta_1(z + 2z^2) + \theta_2 p(1 + z^2)y \\ \dot{y} = z + d(t) + [1 + \omega(t)]u \end{cases} \tag{3.3.19}$$

式中， θ_1 、 θ_2 为未知常数； $d(t)$ 为干扰； $\theta_1 \leq -1$ ， $|d(t)| \leq 1$ ， $|\omega(t)| \leq 0.5$ 。

式 (3.3.19) 与系统 (3.3.1) 对比，出现了干扰 $d(t)$ 。但本方法在此类干扰存在的情况下仍然适用，此时只要将 $d(t)$ 作为 $a(z, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ 的一部分并入 Δ 考虑。

取正定函数 $W(z) = \frac{1}{2}z^2$ ，并根据式 (3.3.1) 取 $f_{zd}(\theta, z) = \theta_1(z + 2z^2)$ ，则有 $L_{f_{zd}}W(z) \leq -z^2(1 + 2z^2)$ 。从而根据式 (3.3.5)、式 (3.3.6)、式 (3.3.8) 可取 $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$ 。根据式 (3.3.12) 取 $\rho_3 = |z|$, $\rho_4 = |z(1 + z^2)|$ 。取假设 3.3.4 中 $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ ，得到相应于式 (3.3.14) 和式 (3.3.17) 的控制律为

$$\begin{cases} u = -2[|z| + 1 + |z||z(1 + z^2)|\xi] \operatorname{sgn}(y) + v \\ \xi = y(1 + z^2) \end{cases} \quad (3.3.20)$$

容易验证系统 (3.3.19) 是零状态可检测的，从而进一步取 $v = -\kappa y$, $\kappa > 0$ 即可全局镇定系统。

取 $d(t) = 0.5 \sin(7t)$, $\theta_1 = -5$, $\theta_2 = 3$, $\omega(t) = 0.5 \sin(3t)$ 。初值 $z = 1$, $y = -1$, $\kappa = 1$ 。为减少高频颤抖，符号函数 $\operatorname{sgn}(y)$ 取为 $\operatorname{sat}(\kappa y)$ ，其中函数 $\operatorname{sat}(\cdot)$ 定义为

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ \operatorname{sgn}(x), & |x| \geq 1 \end{cases}$$

取 $k = 5$ ，则在控制器 (3.3.20) 和 $v = -y$ 的作用下得到仿真结果如图 3.3.1 所示。

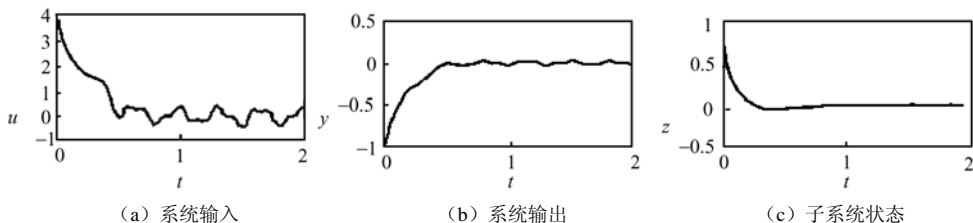


图 3.3.1 仿真结果

第4章 欧拉-拉格朗日系统

在实际工程中，有许多系统可由欧拉-拉格朗日（Euler-Lagrange, EL）方程描述，且这些无源系统不含有内部能量源（如电路、机械系统和机器人），则可基于EL方程和系统的无源性可设计非线性控制器。

4.1 系统的欧拉-拉格朗日方程

4.1.1 欧拉-拉格朗日方程的基本形式

标准机械动力系统的欧拉-拉格朗日方程如下：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.1)$$

式中， $\mathbf{q} = (q_1 \ \cdots \ q_n)^T$ 为具有 n 自由度的系统的广义坐标；拉格朗日函数 L 为 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q})$ ， K 为系统的动能， P 为系统的势能； $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \ \cdots \ \tau_n)^T$ 为作用于系统的广义力向量。

另外， $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ 代表 L 相对于广义速度 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \ \cdots \ \dot{q}_n)^T$ 偏导数列向量； $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ 代表 L 相对于广义坐标 $\mathbf{q} = (q_1 \ \cdots \ q_n)^T$ 偏导数列向量。在标准的机械系统中，动能 K 的形式为

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.1.2)$$

式中， $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 为对任意 \mathbf{q} 的 $n \times n$ 对称正定惯性（广义质量）矩阵。

注意：拉格朗日函数不是系统所具有的物理能量的总和，实际上是系统的广义动能与势能之差。

4.1.2 欧拉-拉格朗日方程的一般形式

下面推导欧拉-拉格朗日的一般形式^[3]。

根据式（4.1.2），拉格朗日函数 L 为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - P(\mathbf{q}) \quad (4.1.3)$$

式中， m_{ij} 为 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 中的第 (i, j) 个元素，并有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \dot{q}_j \quad k=1,2,\dots,n$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dm_{kj}(q)}{dt} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} \quad k=1,2,\dots,n$$

则式 (4.1.1) 变换成如下形式:

$$\sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i=1, j=1}^n \left[\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (4.1.4)$$

由于 $\sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1, j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j$, 则式 (4.1.4) 变换为

$$\sum_{j=1}^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i=1, j=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (4.1.5)$$

式中, $c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]$ 。

将式 (4.1.5) 写成一般矩阵形式为

$$\mathbf{M}(q) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(q) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.6)$$

式中, $\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})$ 中的第 (i, j) 个元素为 $c_{kj}(q) = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i$ 。

4.1.3 欧拉-拉格朗日方程的特性

1. 无功力 $\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$

对于欧拉-拉格朗日方程 (4.1.6), $\dot{\mathbf{M}}(q) - 2\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})$ 为反对称矩阵, 即满足

$$\boldsymbol{\xi}^T [\dot{\mathbf{M}}(q) - 2\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (4.1.7)$$

证明: 据链式求导规则, $\dot{m}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i$, 则 $\dot{\mathbf{M}}(q) - 2\mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}})$ 中第 (k, j) 个元素

为

$$\begin{aligned} \dot{m}_{kj}(q) - 2c_{kj}(q) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \right\} \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

由式 (4.1.8) 可知, j 和 k 互换, 等式的值变号, 即 $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为反对称矩阵。

若取系统的总能量为

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q}) \quad (4.1.9)$$

$$\text{则有 } \dot{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.10)$$

式 (4.1.10) 表明, 系统能量的变化 (功率) 只与 $\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}$ 有关, 与 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ 无关。即 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ 不做功, 称此项为无功功率。利用系统的无功功率可简化系统控制器的设计。

2. 系统的无源性

若取 $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}^T$, 则有

$$\dot{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.11)$$

即系统是无源的。

4.2 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日方程

4.2.1 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日方程^[15]

在实际工程中, 系统要考虑三种外部控制作用, 即控制输入、耗散 (如摩擦、电阻损失等) 及环境对系统的影响。假设控制输入为 $\mathbf{M}\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n_u}$ 为常数矩阵, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为控制向量; 耗散作用的形式为 $-\frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, $\mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})$ 为瑞利耗散函数, 满足

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \geq 0 \quad (4.2.1)$$

综上所述, 外部控制作用为

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\tau}_\xi + \mathbf{M}\mathbf{u} \quad (4.2.2)$$

式中, $\boldsymbol{\tau}_\xi$ 表示外部环境对系统的影响 (扰动)。

于是, 得到考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_\xi \quad (4.2.3)$$

根据式 (4.2.3), 可对系统进行如下分类:

如果系统的维数等于控制输入数 (即 $n = n_u$, $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n$), EL 系统为满驱动的; 如果 $n_u < n$, 欧拉-拉格朗日系统为欠驱动的。

如果瑞利耗散函数满足

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i^2 \quad \alpha_i > 0$$

欧拉-拉格朗日系统 (4.2.3) 为满阻尼系统。另一方面, 若 $\alpha_i = 0$, 则系统 (4.2.3) 为欠阻尼系统。

4.2.2 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日系统的无源性

对于欧拉-拉格朗日系统 (4.2.3), 忽略外部的影响 $\boldsymbol{\tau}_\xi = \mathbf{0}$ 。

取拉格-朗日函数对时间的导数

$$\frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \quad (4.2.4)$$

根据式 (4.1.1) 可得 $\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \boldsymbol{\tau}$, 则式 (4.2.4) 可以写成

$$\frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (4.2.5)$$

将式 (4.2.2) 代入 (4.2.5), 整理可得

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{M}\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \quad (4.2.6)$$

注意, 式 (4.2.6) 中 $\frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是系统的总能量 $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 即

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) \quad (4.2.7)$$

在 $0 \sim T$ 对式 (4.2.6) 进行积分, 得到能量平衡方程

$$\underbrace{H[\mathbf{q}(T), \dot{\mathbf{q}}(T)] - H[\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)]}_{\text{存}} = \underbrace{\int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \mathbf{u} ds}_{\text{供}} - \underbrace{\int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ds}_{\text{耗}} \quad (4.2.8)$$

由式 (4.2.8) 可知, 考虑外部作用时的欧拉-拉格朗日系统是严格无源的。

同理, 式 (4.2.2) 可写成

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_R - \boldsymbol{\tau}_\xi = \mathbf{M}\mathbf{u} \quad (4.2.9)$$

式中, τ_R 代表耗散, $\tau_R = \frac{\partial R(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$ 。

4.2.3 欧拉-拉格朗日系统的分解

对于机电系统, 欧拉-拉格朗日函数能够分解为电气欧拉-拉格朗日和机械欧拉-拉格朗日函数之和的形式^[9]

$$L(q, \dot{q}) = L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m) + L_m(q_m, \dot{q}_m) \quad (4.2.10)$$

式中, $q \triangleq (q_e^T \quad q_m^T)^T$, $q_e \in R^{n_e}$ 及 $q_m \in R^{n_m}$; 下角 e 代表电气量, 下角 m 代表机械量。则系统 (4.1.1) 可表示为电气子系统

$S_e: \begin{pmatrix} \tau_e \\ -\dot{q}_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dot{q}_e \\ \theta \end{pmatrix}$ 、存储函数为 $L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)$, 机械子

系统 $S_m: (\theta + \tau_m) \mapsto \dot{q}_m$ 、存储函数为 $L_m(q_m, \dot{q}_m)$ 负反

馈互联的形式, $\theta \triangleq \frac{\partial L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)}{\partial q_m}$, $\tau \triangleq (\tau_e^T \quad \tau_m^T)^T$,

$\tau_e \in R^{n_e}$, $\tau_m \in R^{n_m}$, 如图 4.2.1 所示。

证明: 将系统 (4.1.1) 分解为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial L_e}{\partial q_e} = \tau_e \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L_m}{\partial q_m} = \tau_m + \theta \end{cases} \quad (4.2.11)$$

$L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)$ 对时间的全导数为

$$\dot{L}_e = \frac{\partial^T L_e}{\partial q_e} \dot{q}_e + \frac{\partial^T L_e}{\partial \dot{q}_e} \ddot{q}_e + \frac{\partial^T L_e}{\partial q_m} \dot{q}_m \quad (4.2.12)$$

注意:

$$\frac{\partial^T L_e}{\partial \dot{q}_e} \ddot{q}_e = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T L_e}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T L_e}{\partial \dot{q}_e} \right) \dot{q}_e$$

将上式代入式 (4.2.12), 利用式 (4.2.11) 的第一个式子, 并考虑到 S_e 的总能量为 $H_e = \frac{\partial^T L_e}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e - L_e$, 则有

$$\dot{H}_e = \tau_e^T \dot{q}_e - \dot{q}_m^T \theta \quad (4.2.13)$$

这表明 S_e 是无源的。

同理, 利用 S_m 的总能量 $H_m = \frac{\partial^T L_m}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L_m$, 可以证明 S_m 是无源的。根据第 2

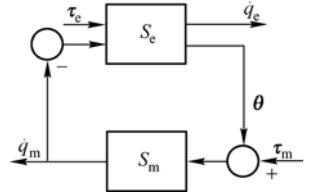


图 4.2.1 欧拉-拉格朗日系统的反馈分解

章相关内容可知，两个无源系统反馈互联后仍是无源的。

4.2.4 欧拉-拉格朗日系统控制器设计

设 $P(q) \neq 0$ ，并假设作用于系统的合力 τ 具体描述为

$$\tau = u - F\dot{q} - w \quad (4.2.14)$$

式中， $u \in R^n$ 表示由外部施加的控制力； $F = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ ， $f_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 表示黏性摩擦系数； $w \in R^n$ 表示等价的干扰力。

于是欧拉-拉格朗日系统的动态方程变为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F\dot{q} = u - w \quad (4.2.15)$$

式中， $C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q)] \right\}$ ， $g(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q}$ 。

1. $w = 0$ 时的控制器设计

下面考虑 $w = 0$ 的镇定问题。如果势能不为 0 ($P(q) \neq 0$)，那么该系统所具有的物理能量总和为

$$H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + P(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + P(q) \quad (4.2.16)$$

根据欧拉-拉格朗日系统的耗散性，可用如下定理研究系统的控制器：

定理 4.2.1 设势能函数 $P(q)$ 满足

$$\left. \frac{\partial P(q)}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 \quad (4.2.17)$$

且在 $q = 0$ 具有局部最小值，则当 $u = 0$ 时，欧拉-拉格朗日系统 (4.2.15) 在原点 $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ 是局部渐进稳定点。

证明见参考文献[16]。

定理 4.2.2 考察欧拉-拉格朗日系统 (4.2.15)。设 $w = 0$ ，且 $(q^*, 0)$ 是给定的期望平衡点。令状态反馈控制律为

$$u = -\frac{\partial P_c(q)}{\partial q} - \varphi(\dot{q}) \quad (4.2.18)$$

式中， $\varphi(s)$ 是满足 $\varphi^T(s)s > 0, \forall s \neq 0$ 的任意函数向量； $P_c(q)$ 是使得

$$P^*(q) = P(q) + P_c(q) \quad (4.2.19)$$

在 $q = q^*$ 具有极小值，且为径向无界的函数。则闭环系统在所期望的平衡点 $(q^*, 0)$ 是全局渐进稳定的。

证明：由于闭环系统可描述为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial P_c(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\varphi}(\dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (4.2.20)$$

对于该系统，修正能量存储函数为

$$H_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P^*(\mathbf{q}) \quad (4.2.21)$$

则沿闭环系统的状态轨迹 $\dot{H}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial P_c(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ &= -(\boldsymbol{\varphi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

又因为仅当 $\dot{\mathbf{q}} = 0$ 时， $\dot{H}_d = 0$ ，且 $\dot{\mathbf{q}} = 0$ 时，由方程 (4.2.20) 可知 \mathbf{q} 满足

$\frac{\partial P^*(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = 0$ ，即 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ 。故渐进稳定性由 LaSalle 不变集定理得证。

定理 4.2.2 的关键是修正能量函数 $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow H_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ，而这种能量函数的成型是通过施加反馈实现的。

2. $\mathbf{w} \neq 0$ 时的控制器设计

当系统中存在干扰 $\mathbf{w} \neq 0$ 时，在一定条件下，通过调节基于能量函数的镇定控制器的增益，可达到抑制干扰的目的。

为评价系统的状态偏离期望平衡点 $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}^*, 0)$ 的程度，引入干扰评价信号

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.2.23)$$

并且调整控制器的增益使得闭环系统满足 L_2 增益条件

$$\int_0^T \|\mathbf{z}\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\mathbf{w}\|^2 dt \quad \mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = 0 \quad (4.2.24)$$

式中， γ 表示干扰抑制水平的充分小的常数。

定理 4.2.3 对于欧拉-拉格朗日系统 (4.2.15)，设 $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}^*, 0)$ 是期望平衡点，并且 $\gamma > 0$ 是任意给定的常数。如果评价函数满足

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}})\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.2.25)$$

式中， $\mathbf{H}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}})$ 是正定的函数阵。

则反馈控制器

$$u = -\frac{\partial P_c(q)}{\partial q} - \varphi(\dot{q}) - \psi(q, q^*, \dot{q}) \quad (4.2.26)$$

使闭环系统满足:

① 当 $w = 0$ 时, 闭环系统在期望的平衡点是渐进稳定的。

② 闭环系统满足 L_2 增益条件 (4.2.24)。

式 (4.2.26) 中 $\varphi(\dot{q})$ 和 $P_c(q)$ 是定理 4.2.2 中给定的增益函数, ψ 给定如下:

$$\psi(q, q_d, \dot{q}) = \frac{1}{2\gamma} \dot{q} + \frac{1}{2} H(q - q^*, \dot{q}) \dot{q} \quad (4.2.27)$$

证明: 当 $w \neq 0$ 时, 对闭环系统重复定理 4.2.2 的证明过程, 得

$$\dot{H}_d = -[\varphi(\dot{q}) + F\dot{q} + \psi(q, q^*, \dot{q})]^T \dot{q} + w^T \dot{q} \quad (4.2.28)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= -[\varphi(\dot{q}) + F\dot{q}]^T \dot{q} + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|z\|^2 - \psi^T(q, q^*, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \|h(q - q^*, \dot{q})\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma} \|\dot{q}\|^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\gamma} \dot{q} - \gamma w \right\|^2 \leq -[\varphi(\dot{q}) + F\dot{q}]^T \dot{q} + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|z\|^2 \\ &\quad - \psi^T(q, q^*, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2\gamma} \|\dot{q}\|^2 + \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q - q^*, \dot{q}) \dot{q} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

将式 (4.2.27) 代入式 (4.2.29) 得

$$\dot{H}_d \leq -[\varphi(\dot{q}) + F\dot{q}]^T \dot{q} + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|z\|^2 \quad (4.2.30)$$

式 (4.2.30) 表明, 半正定函数 H_d 满足耗散不等式

$$\dot{H}_d \leq \frac{1}{2} (\gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2) \quad (4.2.31)$$

将式 (4.2.31) 两边积分, 则①得证。②的证明可参考定理 4.2.2 的证明过程。

定理 4.2.3 给出的控制器是在定理 4.2.2 给定的控制器基础上, 通过增加适当的反馈增益得到的。并且所给定的 γ 越小, 增加的反馈增益就越大。此外, 这种通过增加镇定反馈控制器增益来抑制干扰响应的方法要求评价信号 z 满足式 (4.2.25)。该条件意味着 $\dot{q} = 0$ 时, $z = 0$ 。对于欧拉-拉格朗日系统, \dot{q} 作为输出信号时, 系统具有零状态可检测性, 即 $\dot{q} = 0$ 时, 有 $q \rightarrow q^*$, 所以条件 (4.2.25) 是合理的。

4.3 欧拉-拉格朗日误差系统

4.3.1 欧拉-拉格朗日误差系统 I ^[16]

一般情况下, 希望欧拉-拉格朗日系统能够跟踪给定的期望轨迹 $q^*(t)$ 、 $\dot{q}^*(t)$ 。

对系统 (4.1.6) 施加如下输入:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} + \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.3.1)$$

使得跟踪误差信号 $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$ 的动态满足

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{u} \quad (4.3.2)$$

式中, \mathbf{u} 为新的控制输入。

式 (4.3.2) 为欧拉-拉格朗日误差系统。设欧拉-拉格朗日误差系统的输出为 $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{e}}$, 令能量函数为

$$H = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}^* + \mathbf{e})\dot{\mathbf{e}} \quad (4.3.3)$$

于是得

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad (4.3.4)$$

式 (4.3.4) 表明了欧拉-拉格朗日误差系统是无源的, 但没有涉及误差信号的收敛性。由于欧拉-拉格朗日误差系统对于输出 $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{e}}$ 不是零状态可检测的, 就不能通过简单的静态反馈获得误差的渐进稳定性。对此, 通过重新定义输出信号和修正能量存储函数, 利用无源性获得误差信号的收敛性^[16]。

考察系统 (4.3.2), 令

$$\tilde{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \quad (4.3.5)$$

并施加反馈补偿输入

$$\mathbf{u} = -\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{e} + \mathbf{v} \quad (4.3.6)$$

那么欧拉-拉格朗日误差系统 (4.3.2) 和反馈补偿 (4.3.6) 构成的闭环系统是零状态可检测的, 且对输入 \mathbf{v} 和输出 $\tilde{\mathbf{y}}$ 是无源的。

证明: ① 闭环系统的零状态可检测性。若 $\mathbf{v} = 0$, $\tilde{\mathbf{y}} = 0$, 有

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}} = 0 \\ \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

由式 (4.3.7) 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$, 则闭环系统是零状态可检测的。

② 闭环系统的无源性。定义半正定函数

$$\tilde{H}(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}_d + \mathbf{e})\tilde{\mathbf{y}} \quad (4.3.8)$$

则沿误差系统 (4.3.2) 和反馈补偿 (4.3.6) 构成的闭环系统, 得

$$\dot{\tilde{H}}(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{y}}^T (2\mathbf{M}\dot{\tilde{\mathbf{y}}} + \dot{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{y}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\tilde{\mathbf{y}} \quad (4.3.9)$$

由于 $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ 为反对称矩阵, 则有

$$\dot{\tilde{H}}(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{v} \quad (4.3.10)$$

式 (4.3.10) 表明了闭环系统具有无源性。

4.3.2 欧拉-拉格朗日误差系统 II^[9]

在研究跟踪问题或处理电气、机电系统时，要求系统有更好的性能。主要原因是在这些情况下不但要求 \mathbf{q} 也要求 $\dot{\mathbf{q}}$ 具有期望的性能，这就需修改动能。对此，取欧拉-拉格朗日误差闭环系统的形式为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{e} = 0 \quad (4.3.11)$$

式中， $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$ 表示误差信号， \mathbf{q}^* 为期望信号，期望 \mathbf{e} 为 0； $\mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}_d^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ 为阻尼注入矩阵； $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是由矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 定义的矩阵，满足

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.3.12)$$

注意：式 (4.3.12) 等效于反对称性能

$$\boldsymbol{\xi}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \quad (4.3.13)$$

取欧拉-拉格朗日误差闭环系统 (4.3.11) 是基于以下论述：

对于系统

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{e} = \boldsymbol{\Psi} \quad (4.3.14)$$

式中， $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 和 $\mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是正定的； $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足式 (4.3.12)，则系统为严格输出无源的。

证明：取存储函数

$$H_d = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{e} \geq 0 \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}}] = \mathbf{e}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^T \{\boldsymbol{\Psi} - [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{e}\} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Psi} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Psi} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

式 (4.3.16) 表明了闭环误差系统具有是严格无源的。

例 4.3.1 机器人无源控制问题。^[17]

m 环节机器人非线性动态方程取如下形式：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (4.3.17)$$

式中， \mathbf{q} 为表示关节位置的广义坐标的 m 维向量； \mathbf{u} 为 m 维控制输入； $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 为对

所有 $q \in R^m$ 正定的系统惯性矩阵； $C(q, \dot{q})\dot{q}$ 表示离心力和科里奥利力，矩阵 $C(q, \dot{q})$ 对所有 $q, \dot{q} \in R^m$ 使 $\dot{M} - 2C$ 具有反对称性质， \dot{M} 为 M 相对于 t 的全导数； $D\dot{q}$ (D 为半正定对称矩阵) 表示黏性阻尼； $g(q)$ 表示地球引力，并由 $g(q) = \frac{\partial P^T(q)}{\partial q}$ 确定， $P(q)$ 所有环节的总势能。

设计状态反馈控制律使 q 渐进跟踪恒定的期望 q^* 。令 $e = q - q^*$ ，则 e 满足误差动态方程

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + g(q) = u \quad (4.3.18)$$

系统控制目标是系统在 $e = 0$ 、 $\dot{e} = 0$ 处稳定，但 $e = 0$ 、 $\dot{e} = 0$ 处不是开环的平衡点，则令

$$u = g(q) - K_p e + v \quad (4.3.19)$$

式中， K_p 为正定对称矩阵； v 为可选择的附加控制。

将式 (4.3.19) 代入式 (4.3.18) 得

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + K_p e = v \quad (4.3.20)$$

取能量存储函数为

$$H = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e \quad (4.3.21)$$

能量存储函数 H 是正定的， H 的导数满足

$$\dot{H} = \dot{e}^T M \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M} \dot{e} + e^T K_p \dot{e} = \frac{1}{2} \dot{e}^T (\dot{M} - 2C) \dot{e} - \dot{e}^T D \dot{e} - \dot{e}^T K_p e + \dot{e}^T v + e^T K_p \dot{e} \leq \dot{e}^T v \quad (4.3.22)$$

定义输出为 $y = \dot{e}$ ，可以看出具有输入 v 和输出 y 、存储函数为 H 的系统是无源的。有趣的是，无源反馈分量 $g(q) - K_p e$ 的作用将势能成型为 $e^T K_p e / 2$ ，且在 $e = 0$ 处有唯一的最小值。动能和被成型的势能的和是能量存储函数。对于 $v = 0$ ，有

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow K_p e(t) \equiv 0 \Rightarrow e(t) \equiv 0 \quad (4.3.23)$$

式 (4.3.23) 表明了系统是零状态可检测的。因此，系统可由含有任意函数 φ (满足 $\varphi(0) = 0$ 和对任意的 $y \neq 0$ 有 $y^T \varphi(y) > 0$) 的控制 $v = -\varphi(\dot{e})$ 予以大范围稳定。选择具有正定对称矩阵 K_d 的 $v = -K_d \dot{e}$ ，得到的控制器为

$$u = g(q) - K_p (q - q^*) - K_d \dot{q} \quad (4.3.24)$$

式 (4.3.24) 为传统的 PD 控制器加地球引力补偿项的形式。

第5章 哈密顿系统理论

第4章论述了欧拉-拉格朗日系统及控制器设计思想。本章论述由欧拉-拉格朗日方程衍生出来的系统哈密顿表达形式，这同样体现了系统的能量属性。因此，基于系统哈密顿模型的无源控制在工程中得到了广泛应用。

5.1 哈密顿系统

5.1.1 从欧拉-拉格朗日方程到哈密顿系统^[3, 18, 19]

1. 哈密顿方程

从第4章可知，标准的机械系统欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.1.1)$$

式中， $\mathbf{q} = (q_1 \cdots q_n)^T$ 为具有 n 自由度的系统的广义坐标；欧拉-拉格朗日函数 $L = K - P$ ， K 为系统的动能， P 为系统的势能； $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \cdots \tau_n)^T$ 为作用于系统的广义力向量。

另外， $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ 代表 L 相对于广义速度 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n)^T$ 偏导数列向量， $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ 代表 L 相对于广义坐标 $\mathbf{q} = (q_1 \cdots q_n)^T$ 偏导数列向量。在标准的机械系统中，动能 K 的形式为

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.1.2)$$

式中， $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 为对任意 \mathbf{q} 的 $n \times n$ 对称正定惯性（广义质量）矩阵。

在这种情况下，拉格朗日函数定义的广义动量向量 $\mathbf{p} = (p_1 \cdots p_n)^T = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ 为

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.1.3)$$

定义状态向量 $\mathbf{q} = (q_1 \cdots q_n \ p_1 \cdots p_n)^T$ ，则 n 个二阶方程（5.1.1）转换成 $2n$ 个一阶方程，即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

式中, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q})$ 为系统的总能量。

式 (5.1.4) 称为系统的哈密顿方程, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 称为哈密顿函数。于是从式 (5.1.4) 立即可得能量平衡方程为

$$\frac{dH(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{dt} = \frac{\partial^T H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^T H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial^T H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (5.1.5)$$

式 (5.1.5) 表明了系统能量的增加等于外界对系统所做的功, 即能量守恒。

2. 哈密顿系统

(1) 哈密顿系统方程

设系统输入 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$ 和输出 $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}$, 哈密顿方程 (5.1.4) 可变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

方程 (5.1.6) 视为一个配置输入输出的哈密顿系统。

假设哈密顿函数 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 是正的动能和有下界的势能和, 即

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + P(\mathbf{q}) \quad (5.1.7)$$

式中, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q})$; $P(\mathbf{q}) \geq C$, $C > -\infty$ 。

于是, 具有输入 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$ 和输出 $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{q}}$ 的哈密顿方程 (5.1.6) 是具有存储函数 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - C \geq 0$ 的无源 (实际上是无损的) 状态空间系统 (对于无源和耗散系统的一般理论)。由于系统的能量仅被定义为大于一个常数, 因此, 势能函数取为 $P(\mathbf{q}) - C \geq 0$, 则总能量 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 变为非负的, 于是 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 可作为存储函数。

系统 (5.1.6) 更广义的形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} & (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u} & \mathbf{u} \in R^m \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^T(\mathbf{q}) \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{B}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{y} \in R^m \end{cases} \quad (5.1.8)$$

式中, $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ 为输入力矩阵, $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$ 为由控制输入 $\mathbf{u} \in R^m$ 产生的广义力。

通常称局部坐标 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) 下的状态空间 (5.1.8) 为相空间。一般地讲, 当 $m < n$

时，系统 (5.1.8) 为欠驱动系统； $m = n$ 且 $B(q)$ 矩阵处处可逆，系统 (5.1.8) 为全驱动系统。

根据输出方程的形式 $y = B^T(q)\dot{q}$ ，可得到能量平衡方程

$$\frac{dH(q, p)}{dt} = u^T y \quad (5.1.9)$$

若 $H(q, p)$ 非负或有下界，则哈密顿系统 (5.1.8) 是无损的状态空间系统。

(2) 端口受控哈密顿系统

将系统 (5.1.8) 描述的一类哈密顿系统进一步扩展，在局部坐标下可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u & u \in R^m \\ y = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} & y \in R^m \end{cases} \quad (5.1.10)$$

式中， $J(x)$ 为 $n \times n$ 反对称矩阵， $J(x) = -J^T(x)$ ， $x = (x_1 \cdots x_n)^T$ 是 n 维状态空间流形 X 的局部坐标。

根据 $J(x) = -J^T(x)$ ，容易得到能量平衡 $\frac{dH(x)}{dt} = u^T y$ ，这表明如果 $H(x) \geq 0$ ，系统 (5.1.10) 是无损的。当系统 (5.1.10) 中 $J(x)$ 为反对称矩阵，则称系统 (5.1.10) 为具有结构矩阵 $J(x)$ 和哈密顿函数 $H(x)$ 的端口受控的哈密顿 (Port Controlled Hamiltonian, PCH) 系统。注意：式 (5.1.8) 以及式 (5.1.4) 是式 (5.1.10) 的特例。其中， $x = (q, p)$ ， $J(x)$ 为一定常的反对称矩阵， $J(x) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ ， $g(q, p) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(q) \end{pmatrix}$ 。

在很多情况下，结构矩阵 $J(x)$ 满足“可积性”条件，即

$$\sum_{l=1}^n \left[J_{lj}(x) \frac{\partial J_{ik}(x)}{\partial x_l} + J_{li}(x) \frac{\partial J_{kj}(x)}{\partial x_l} + J_{lk}(x) \frac{\partial J_{ji}(x)}{\partial x_l} \right] = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad (5.1.11)$$

在这种情况下，根据 Darboux 定理可知，在任一点 x_0 附近，矩阵 $J(x)$ 的秩为一常数，具有 $n = 2k + l$ 维的局部坐标为

$$\tilde{x} = (q, p, s) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, s_1, \dots, s_l)$$

因此， $J(x)$ 在局部坐标下的形式为

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.12)$$

式中， $J(x)$ 矩阵的秩为 $2n$ 。

一般称坐标 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)$ 为正则坐标, 满足 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$ 的 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 称为泊松结构矩阵 (poisson structure matrix) [20]。在正则坐标系中, 方程 (5.1.10) 可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{g}_q(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}_p(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\mathbf{u} \\ \dot{s} = \mathbf{g}_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}_p^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{g}_s^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)}{\partial s} \end{cases} \quad (5.1.13)$$

方程 (5.1.13) 除多出变量 s 外, 非常接近于标准的哈密顿系统的形式。特别是, 若 $\mathbf{g}_s = 0$, 变量 s 仅仅是一组附加的恒定参数。

例 5.1.1 考虑图 5.1.1 所示受控 LC 电路, 电路由存储磁场能 $H_1(\varphi_1)$ 、 $H_2(\varphi_2)$ (φ_1 、 φ_2 为 L_1 和 L_2 的磁链) 的两个电感和存储电场能 $H_3(Q)$ (Q 为电荷) 的一个电容组成。设所有元件都是线性的, 则 $H_1(\varphi_1) = \frac{1}{2L_1}\varphi_1^2$, $H_2(\varphi_2) = \frac{1}{2L_2}\varphi_2^2$, $H_3(Q) = \frac{1}{2C}Q^2$ 。

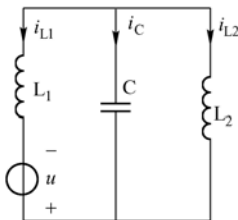


图 5.1.1 受控 LC 电路

根据 $\varphi_1 = L_1 i_{L1}$ 、 $\varphi_2 = L_2 i_{L2}$ 及 $Q = C u_C$, 由基尔霍夫定律可得

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -\frac{\varphi_1}{L_1} - \frac{\varphi_2}{L_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{Q}{C} + u \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{Q}{C} \end{cases} \quad (5.1.14)$$

设哈密顿函数 $H(Q, \varphi_1, \varphi_2) = H_1(\varphi_1) + H_2(\varphi_2) + H_3(Q)$, 式 (5.1.14) 可以写成如下形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \frac{\varphi_1}{L_1} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.1.15)$$

方程 (5.1.15) 为受控 LC 电路端口受控的哈密顿系统方程。

例 5.1.2 研究在忽略重力作用条件下刚体绕质心的转动问题。选择刚体的角动量 \mathbf{p} 在三个坐标轴上的分量 $\mathbf{p} = (p_x \quad p_y \quad p_z)$ 为能量变量，系统的能量为动能

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_x^2}{I_x} + \frac{p_y^2}{I_y} + \frac{p_z^2}{I_z} \right) \quad (5.1.16)$$

式中， I_x 、 I_y 、 I_z 为基本转动惯量。

描述忽略重力作用条件下刚体绕质心的转动的动态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix}}_{J(\mathbf{p})} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_z} \end{pmatrix} + g(\mathbf{p})u \quad (5.1.17)$$

可以验证反对称矩阵 $J(\mathbf{p})$ 满足可积性条件。在输入是标量的情况下， $g(\mathbf{p})u$ 表示的是作用于坐标为 $\mathbf{g} = (b_x \quad b_y \quad b_z)^T$ 的转轴的力矩，相应的输出为

$$y = b_x \frac{p_x}{I_x} + b_y \frac{p_y}{I_y} + b_z \frac{p_z}{I_z} \quad (5.1.18)$$

式 (5.1.19) 表示绕同一轴 $(b_x \quad b_y \quad b_z)^T$ 的速度。

5.1.2 端口受控哈密顿系统的基本性能^[3, 18, 19]

上述提到的端口受控哈密顿系统来源于没有耗散元件的物理系统的网络模型。

端口受控哈密顿系统可通过具有三元组 (J, g, H) 的状态空间流形 X 定义。 $J(x)$, $x \in X$ 反映了系统的互联结构, $g(x)$ 反映了系统的端口特性。很清楚, 例 5.1.1 ($[J(x), g(x)]$ 由基尔霍夫定律确定) 是典型的功率守恒互联结构的例子, 但它对没有耗散的其他物理系统也是成立的。独立于互联结构的哈密顿函数 $H: X \rightarrow R$ 定义了系统存储的总能量。另外, 在某种意义上讲, 多个端口受控哈密顿系统的功率守恒互联还是端口受控哈密顿系统, 总互联结构由每个单个系统通过功率守恒互联构成的互联结构决定的, 总哈密顿函数是每个单个系统哈密顿函数的和。

如前所述, 端口受控哈密顿系统的一个基本特性是能量平衡 $\frac{dH(x)}{dt} = u^T y$ 。物理上它对应于内部互联结构是能量守恒的这一事实 (起因于 $J(x)$ 是反对称矩阵), u 、 y 为通过 $g(x)$ 定义的端口能量变量, 这样 $u^T y$ 即为外部供给的功率。

1. 卡什米尔函数

由端口受控哈密顿系统的结构矩阵 $J(x)$ 可以获得与系统动态性能有关的有用信息。从结构矩阵可直接获得的重要性能是独立于哈密顿函数 H 的动态不变性的存在, 即存在能量卡什米尔函数 (casimir function) ^[21]。

考虑偏微分方程组

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} J(x) = 0 \quad x \in X \quad (5.1.19)$$

式中, $C: X \rightarrow R$ 为未知的 (光滑) 函数。

如果式 (5.1.19) 存在解 C , 则 C 沿着 PCH 系统 (5.1.10) 的解曲线对时间的导数满足

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial^T C(x)}{\partial x} J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial^T C(x)}{\partial x} g(x) u = \frac{\partial^T C(x)}{\partial x} g(x) u \quad (5.1.20)$$

因此, 对于输入 $u=0$ 或者满足 $\frac{\partial^T C(x)}{\partial x} g(x) u = 0$ 的任意输入函数, 则不论 H 函数的具体形式如何, 函数 $C(x)$ 沿着 PCH 系统的解曲线保持定常。满足式 (5.1.19) 的函数 $C: X \rightarrow R$ 称为关于结构矩阵 $J(x)$ 的卡什米尔函数。

如果式 (5.1.19) 存在非平凡解 (non-trivial solutions) C , 则显然有 $\text{rank} J(x) < \dim X$, 但这与可积性条件 (5.1.11) 有关。实际上, 如果能找到如同式 (5.1.12) 中的正则坐标 (q, p, s) , 则仅依赖于坐标 s 的所有函数 $C: X \rightarrow R$ 都是卡什米尔函数。从式 (5.1.20) 可知, 某一卡什米尔函数 C 的水平集 (level set) $L_c \triangleq \{x \in X | C(x) = C\}$, $C \in R$ 为自治哈密顿系统 $\dot{x} = J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}$ 的不变集

(invariant set)。而且, 限制在某一水平集 L_c 上的动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 有如下降阶形式:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{J}_c(\mathbf{x}_c) \frac{\partial H_c(\mathbf{x}_c)}{\partial \mathbf{x}_c} \quad (5.1.21)$$

式中, H_c 和 \mathbf{J}_c 分别为限制在 L_c 上的 H 和 \mathbf{J} 。

更一般的情况, 如果 $\mathbf{C} = (C_1 \cdots C_r)$ 为一组独立的卡什米尔函数, 则在 X 的任意一组局部坐标 $(z_1, \cdots, z_l, C_1, \cdots, C_r)$ 下, 哈密顿动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 可写成

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{z}, \mathbf{C}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{C}} \end{pmatrix} \quad (5.1.22)$$

并可推出定义在一组水平集 $\{\mathbf{x} \in X \mid C_1(\mathbf{x}), \cdots, C_r(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \in R^r\}$ 上的降阶哈密顿动态系统

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{z}, \mathbf{C} = \mathbf{c}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \quad (5.1.23)$$

如果卡什米尔函数存在, 可以得到 $\mathbf{u} = 0$ 时式 (5.1.10) 描述的系统稳定性的一些结论。若 C_1, \cdots, C_r 为卡什米尔函数, 则由式 (5.1.19) 可知当 $\mathbf{u} = 0$ 时, 有

$\frac{dH}{dt} = 0$, 且对于任意函数 $H_a: R^r \rightarrow R$ 存在

$$\frac{d}{dt}[H + H_a(C_1, \cdots, C_r)]\mathbf{x}(t) = 0 \quad (5.1.24)$$

因而, 即使 H 在平衡点 $\mathbf{x}^* \in X$ 处不是正定的, 仍可以通过适当的选择 H_a 使 $H + H_a(C_1, \cdots, C_r)$ 在 \mathbf{x}^* 处正定, 这样, 便可选择 $H + H_a$ 作为系统的 Lyapunov 函数。这种稳定性分析方法称为能量卡什米尔方法。

2. 保容性

保容性与结构矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 及可积性条件有关。首先假设 $\text{rank} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \dim X$, 且 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 满足可积性条件, 则存在局部坐标 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) 使

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.25)$$

定义在局部坐标 x_1, \cdots, x_n 下的微分方程组

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \cdots, x_n) \quad i = 1, \cdots, n \quad (5.1.26)$$

的散度为

$$\operatorname{div}(X)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (5.1.27)$$

设 $x(t, x_0) = X'(x_0)$, $t \geq 0$, 表示初值 $x(0) = x_0$ 时式 (5.1.26) 的解曲线, 则映射 $X' : R^n \rightarrow R^n$ 为保容映射, 即

$$\det \left[\frac{\partial X'(x)}{\partial x} \right] = 1 \quad \forall x \in R^n \quad t \geq 0 \quad (5.1.28)$$

当且仅当对任意的 $x \in R^n$ 有 $\operatorname{div}(X)(x) = 0$ 。对于 $u = 0$ 时的自治哈密顿系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.1.29)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 由式 (5.1.25) 给出, 可见在 (q, p) 坐标下, 式 (5.1.29) 的散度处处为零, 因而式 (5.1.29) 的解在 (q, p) 空间 (相空间) 中保持标准容积。

当 $\operatorname{rank} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 2k < \dim X$ 且存在形如式 (5.1.12) 的局部坐标 (q, p, s) 时, 自治哈密顿系统 (5.1.29) 在 (q, p, s) 空间中保持标准容积, 且在 (q, p) 坐标系下的任意一组水平集 (即不变集)

$$s_1 = c_1, \dots, s_l = c_l \quad (5.1.30)$$

中存在保容性。

例 5.1.3 对于例 5.1.1, 由式 (4.1.15) 可知结构矩阵 \mathbf{J} 为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (5.1.31)$$

式 (5.1.31) 表明, \mathbf{C} 与 x_1 无关, 是 x_2 、 x_3 的函数, 则卡什米尔函数为 $\mathbf{C} = \varphi_1 - \varphi_2$ 或 $\mathbf{C} = -\varphi_1 + \varphi_2$ 。

对于例 5.1.1 的自治系统为

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q} = -\frac{\varphi_1}{L_1} - \frac{\varphi_2}{L_2} \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{Q}{C} \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{Q}{C} \end{cases} \quad (5.1.32)$$

则有 $\operatorname{div}(X)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$ ，这说明例 5.1.1 的自治系统在 $(Q, \varphi_1, \varphi_2)$ 坐标下散度处处为零，即存在保容性。

例 5.1.4 对于例 5.1.2，由式 (5.1.17) 可知结构矩阵 \mathbf{J} 为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_x & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix}$$

由 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -p_z \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_y} + p_y \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_z} = 0 \\ p_z \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_z} = 0 \\ -p_y \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_x} + p_x \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_y} = 0 \end{cases} \quad (5.1.33)$$

式 (5.1.33) 表明， \mathbf{C} 是 x_1 、 x_2 、 x_3 的函数，则卡什米尔函数为 $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ 。

对于例 5.1.2 的自治系统为

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_x = -p_z \frac{p_y}{I_y} + p_y \frac{p_z}{I_z} \\ \dot{p}_y = p_z \frac{p_x}{I_x} - p_x \frac{p_z}{I_z} \\ \dot{p}_z = -p_y \frac{p_x}{I_x} + p_x \frac{p_y}{I_y} \end{cases} \quad (5.1.34)$$

则有 $\operatorname{div}(X)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$ ，这说明例 5.1.2 的自治系统在 (p_x, p_y, p_z) 坐标

下散度处处为零，即存在保容性。

5.1.3 端口受控的耗散哈密顿系统

1. 端口受控的耗散哈密顿系统的模型^[3]

在 PCH 系统 (5.1.10) 的一些端口接入阻性元件, 可将能量耗散的概念引入 PCH 系统框架中, 实际上系统 (5.1.10) 中的 $\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 替代为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{g}_R(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_R \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{g}_R(\mathbf{x})\mathbf{u}_R \quad (5.1.35)$$

相应地将输出方程 $\mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 扩展为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{g}_R^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (5.1.36)$$

式中, $\mathbf{u}_R, \mathbf{y}_R \in R^m$ 表示接入静态阻性元件端口的功率变量

$$\mathbf{u}_R = -F(\mathbf{y}_R) \quad (5.1.37)$$

式 (5.1.37) 中描述阻性元件特性的函数 $F: R^m \rightarrow R^m$ 满足

$$\mathbf{y}_R^T F(\mathbf{y}_R) \geq 0 \quad \mathbf{y}_R \in R^m \quad (5.1.38)$$

下面讨论端口接入线性阻性元件的 PCH 系统

$$\mathbf{u}_R = -S\mathbf{y}_R \quad (5.1.39)$$

式中, $S = S^T \geq 0$ 为对称半正定矩阵。

将式 (5.1.39) 代入式 (5.1.35) 得到端口受控的耗散哈密顿系统模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.1.40)$$

式中, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{g}_R(\mathbf{x})S\mathbf{g}_R^T(\mathbf{x})$ 为光滑依赖于 \mathbf{x} 的半正定对称矩阵。

在这种情况下, 能量平衡 (5.1.9) 变成如下形式:

$$\frac{dH[\mathbf{x}(t)]}{dt} = \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t) - \frac{\partial^T H[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}[\mathbf{x}(t)] \frac{\partial H[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}} \leq \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t) \quad (5.1.41)$$

式 (5.1.41) 表明, 如果哈密顿函数有下界, PCH 系统是无源的。

注意: 式 (5.1.40) 中的两个重要的几何结构: $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 反映了系统内部的互联结构, 而 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 反映了端口上的附加的阻性结构, $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 由反映端口的 $\mathbf{g}_R(\mathbf{x})$ 和阻性元件的线性关系 $\mathbf{u}_R = -S\mathbf{y}_R$ 决定。

2. 端口受控的耗散哈密顿系统的卡什米尔函数^[3, 18]

讨论函数 $C: X \rightarrow R$ 满足偏微分方程组

$$\frac{\partial^T C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] = 0 \quad \mathbf{x} \in X \quad (5.1.42)$$

由式 (5.1.42) 可推知, 当 $\mathbf{u} = 0$ 时, 不论函数 H 具有什么样的形式, C 函数沿着端口受控的耗散哈密顿系统的解曲线对时间求导的值为零。

一个关于卡什米尔函数的更强的概念为函数 $C: X \rightarrow R$ 是分别由 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 定义的两个几何结构的卡什米尔函数, 因此满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^T C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0 \\ \frac{\partial^T C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (5.1.43)$$

如果存在一组彼此独立的函数 C_1, \dots, C_r 满足式 (5.1.43), 则在某一组局部坐标 $(\mathbf{z}, \mathbf{C}) = (z_1, \dots, z_l, C_1, \dots, C_r)$ 下, 当 $\mathbf{u} = 0$ 时, 动态系统 (5.1.40) 的形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{C}} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{z}, \mathbf{C}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{z}, \mathbf{C}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{C}} \end{pmatrix} \quad (5.1.44)$$

若限制在任意一组水平集 $\{\mathbf{x} \in X \mid (C_1(\mathbf{x}), \dots, C_r(\mathbf{x})) = \mathbf{c} \in R^r\}$ 上, 式 (5.1.44) 可以变换成

$$\dot{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{z}, \mathbf{C} = \mathbf{c}) - \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{z}, \mathbf{C} = \mathbf{c})] \frac{\partial H(\mathbf{z}, \mathbf{C} = \mathbf{c})}{\partial \mathbf{z}} \quad (5.1.45)$$

例 5.1.5 电容式麦克风电路原理图如图 5.1.2 所示。图中的电容 $C(q)$ 为右极板 (质量为 m) 位移 q 的函数, 右极板与一弹簧 (弹性系数为 $k > 0$) 和一阻尼器 (阻尼系数为 $c > 0$) 相连, 并且有一力 F 作用于其上 (它表示声音引起的空气压力), E 为一电压源。

取位移 q 、动量 p 、电容电荷 Q 为状态变量, 根据图 5.1.2 可得系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = m\ddot{q} = F - c\dot{q} - kq \\ \dot{Q} = \frac{E}{R} - \frac{Q}{RC(q)} \end{cases} \quad (5.1.46)$$

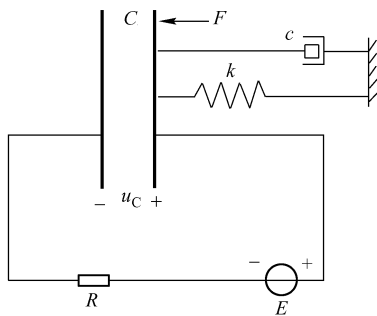


图 5.1.2 电容式麦克风电路原理图

设系统的哈密顿函数为 $H(q, p, Q) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k(q - \bar{q})^2 + \frac{1}{2C(q)} Q^2$ ， \bar{q} 为弹簧的平衡位置。则方程（5.1.46）可写成 PCHD 的形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/R \end{pmatrix} E \\ y_1 = \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{q} \\ y_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial Q} = i \end{array} \right. \quad (5.1.47)$$

注意： $F\dot{q}$ 、 Fi 分别为作用于系统的机械功率和电功率。在麦克风电路中，电阻上的电压（经放大后）可用于测量机械力 F 的大小。

例 5.1.6 永磁同步电动机（Permanent Magnet Synchronous Motor, PMSM）数学模型^[22]。在忽略转矩阻尼系数和扭转弹性转矩系数情况下，永磁同步电动机在 dq 坐标系下的数学模型为

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{sd} \frac{di_{sd}}{dt} = -R_s i_{sd} + \omega_r L_{sq} i_{sq} + u_{sd} \\ L_{sq} \frac{di_{sq}}{dt} = -R_s i_{sq} - \omega_r L_{sd} i_{sd} - \omega_r \psi_r + u_{sq} \\ \frac{J}{n_p} \frac{d\omega_r}{dt} = n_p [\psi_r i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}] - T_L \end{array} \right. \quad (5.1.48)$$

式中， u_{sd} 、 u_{sq} ， i_{sd} 、 i_{sq} 分别为定子电压、电流在 d 轴及 q 轴上的分量； ψ_r 为永

磁链； L_{sd} 、 L_{sq} 为定子相绕组的等效自感。

定义系统的状态、输入及输出分别为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{sd} i_{sd} \\ L_{sq} i_{sq} \\ J \omega_r / n_p \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \omega_r / n_p \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ -T_L \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \omega_r / n_p \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \text{diag}(L_{sd}, L_{sq}, J)。$$

式 (5.1.48) 变为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -R_s \frac{x_1}{L_{sd}} + \frac{n_p}{J} x_3 x_2 + u_{sd} \\ \frac{dx_2}{dt} = -R_s \frac{x_2}{L_{sq}} - \frac{n_p}{J} x_3 x_1 - \frac{n_p}{J} x_3 \psi_r + u_{sq} \\ \frac{dx_3}{dt} = n_p \psi_r \frac{x_2}{L_{sq}} + n_p x_1 \frac{x_2}{L_{sq}} - n_p x_2 \frac{x_1}{L_{sd}} - T_L \end{cases} \quad (5.1.49)$$

式中， n_p 为永磁同步电动机极对数。

取 PMSM 系统的 Hamilton 函数为电能与机械动能总和，则有

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{2L_{sd}} x_1^2 + \frac{1}{2L_{sq}} x_2^2 + \frac{1}{2J} x_3^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{L_{sd}} & \frac{x_2}{L_{sq}} & \frac{x_3}{J} \end{pmatrix}^T$$

式 (5.1.49) 变为

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_p x_2 \\ 0 & 0 & -n_p (x_1 + \psi_r) \\ -n_p x_2 & n_p (\psi_r + x_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R_s & 0 & 0 \\ 0 & -R_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ -T_L \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

(5.1.50)

式 (5.1.50) 可简写成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_H - \mathbf{R}_H) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_H \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}_H^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.1.51)$$

式 (5.1.51) 为永磁同步电动机的 PCHD 数学模型。

5.2 端口受控哈密顿系统的控制

5.2.1 端口受控的耗散哈密顿系统标准反馈互联控制

1. 标准反馈互联控制及卡什米尔函数^[3, 18]

考虑端口受控的耗散哈密顿系统

$$P: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad \mathbf{x} \in X \quad (5.2.1)$$

为一受控系统。在实际工程中，许多物理系统可描述为式 (5.2.1) 的形式，并且 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 及 H 都有具体的物理意义。而且，如果 H 有下界，则式 (5.2.1) 为一无源系统。

由第 2 章相关介绍可知，两个无源系统通过标准反馈互联得到的系统仍是无源的，这可用于各种稳定性和控制器设计中。按照同样的思路，考虑将受控系统 (5.2.1) 和另一个端口受控的耗散哈密顿系统进行互联，另一个端口受控的耗散哈密顿系统（控制器）形式为

$$C: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{g}_c^T(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{cases} \quad \boldsymbol{\xi} \in X_c \quad (5.2.2)$$

受控系统 P 与控制器 C 通过标准（功率守恒）反馈互联

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{y}_c \\ \mathbf{u}_c = \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

进行连接。

通过标准（功率守恒）反馈互联构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & -\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}_c^\top(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi})\mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) & \mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

式 (5.2.4) 仍是一个端口受控的耗散哈密顿系统，其状态空间为乘积空间 $\mathbf{X} \times \mathbf{X}_c$ ，总的哈密顿函数为 $H(\mathbf{x}) + H_c(\boldsymbol{\xi})$ 。因此，任意两个端口受控的耗散哈密顿系统经反馈互联得到的仍是 PCHD 系统，这与无源系统的互联类似。

下面确定扩展状态空间 $\mathbf{X} \times \mathbf{X}_c$ 中的卡什米尔函数 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 。考虑一般的卡什米尔函数 $\mathbf{C}: \mathbf{X} \times \mathbf{X}_c \rightarrow \mathbf{X}_c$ ， $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 满足偏微分方程

$$\left(\frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) (\mathbf{J}_{cl}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{R}_{cl}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) = 0 \quad (5.2.5)$$

并可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})) + \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_c^\top(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} (\mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi})) = 0 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

将式 (5.2.6) 的第一个方程右乘以 $\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}}$ ，第二个方程右乘以 $\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ ，根据

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_c^\top(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\top, \text{ 可得} \\ \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \\ -\frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{cases} \quad (5.2.7) \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \geq 0$ 、 $\mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$ ，则根据 (5.2.7) 中第二个方程有

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}^\top(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \end{cases} \quad (5.2.8)$$

式 (5.2.8) 可等效为

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{R}_c(\xi) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (5.2.9)$$

综上所述, 当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} \mathbf{J}_c(\xi) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{R}_c(\xi) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} \mathbf{g}_c(\xi) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi} \mathbf{J}_c(\xi) = \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_c^T(\xi) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)$ 是 (5.2.6) 的解, 即为卡什米尔函数。

2. 标准反馈互联控制的稳定性^[23]

考虑受控系统 (5.2.1)、控制器 (5.2.2) 及功率守恒互联 (5.2.3)。假设存在受控系统与控制器互联的卡什米尔函数满足式 (5.2.10)。由受控系统和控制器的哈密顿函数、卡什米尔函数构成 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}, \xi) = H(\mathbf{x}) + H_c(\xi) + \Phi(\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)) \quad (5.2.11)$$

式中, $\Phi: X_c \rightarrow R$ 为任意的 \mathbf{C} 的函数。

由式 (5.2.5) 可得

$$\frac{dV(\mathbf{x}, \xi)}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \mathbf{R}_c(\xi) \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \leq 0$$

下一步是在扩展状态空间中进行闭环能量成型, 且在 (\mathbf{x}^*, ξ^*) 处有最小值。于是, $V(\mathbf{x}, \xi)$ 应满足

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{H(\mathbf{x}) + H_c(\xi) + \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)]\} \right|_{(\mathbf{x}^*, \xi^*)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \{H(\mathbf{x}) + H_c(\xi) + \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)]\} \right|_{(\mathbf{x}^*, \xi^*)} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.2.12)$$

和

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \{H(\mathbf{x}) + H_c(\xi) + \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)]\} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mathbf{x}} \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)] \\ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \xi} \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)] & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{H(\mathbf{x}) + H_c(\xi) + \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \xi)]\} \end{pmatrix} \bigg|_{(\mathbf{x}^*, \xi^*)} \geq 0 \quad (5.2.13)$$

假设 $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*)$ 处有严格局部最小值。此外, 假设包含在

$$\left\{ (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in X \times X_c \mid \frac{\partial H^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0, \frac{\partial H_c^T(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \right\}$$

集内的动态系统 (5.2.4) 的最大不变集等于 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*)$, 则 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*)$ 是系统 (5.2.1) 的局部渐进稳定平衡点。

例 5.2.1 考虑摆的方程

$$\ddot{q} + \sin q + d\dot{q} = u \quad (5.2.14)$$

式中, d 为正的阻尼常数。

令 $x_1 = q$, $x_2 = p = m\dot{q}$ (m 为质量), 系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} x_2 \\ \dot{x}_2 = -m \sin x_1 - dx_2 + mu \end{cases} \quad (5.2.15)$$

取系统的能量函数

$$H = \frac{1}{2m} x_2^2 + (1 - \cos x_1)$$

可得

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dm \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} = x_2 \end{cases} \quad (5.2.16)$$

考虑采用控制器 (5.2.2), 则卡什米尔函数 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 满足式 (5.2.10), 有

$$\frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) = 0, \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_2} = 0, \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0, \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_c^T(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (5.2.17)$$

由式 (5.2.17) 可知, $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 与 x_2 无关, $\mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$, 可取 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = x_1 - \xi$, 则有 $\mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\mathbf{g}_c^T(\boldsymbol{\xi})$ 可取任意函数。于是可得控制器

$$\mathbf{C}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{cases} \quad \boldsymbol{\xi} \in X_c \quad (5.2.18)$$

设期望点 (x_1^*, ξ^*) ，对势能 $P(x_1)$ 成型，在 (x_1^*, ξ^*) 处有最小值。对此，选择控制器能量函数 $H_c(\xi)$ 和 $\Phi[C(x, \xi)]$ 分别为

$$H_c(\xi) = \frac{1}{2} \beta \left(\xi - \xi^* - \frac{1}{\beta} \sin x_1^* \right)^2 \quad (5.2.19)$$

$$\Phi[C(x, \xi)] = \Phi(x_1 - \xi) = \frac{1}{2} k \left[x_1 - x_1^* - \left(\xi - \xi^* \right) - \frac{1}{k} \sin x_1^* \right]^2 \quad (5.2.20)$$

式中， β 、 k 的选择须满足式 (5.2.12) 和式 (5.2.13)。

经计算可得 β 、 k 须满足

$$\cos x_1^* + k > 0, \beta \cos x_1^* + k \cos x_1^* + k\beta > 0$$

根据控制器及标准功率守恒互联，可得控制律为

$$u = -\frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} = -\beta \left(\xi - \xi^* - \frac{1}{\beta} \sin x_1^* \right) \quad (5.2.21)$$

例 5.2.2 研究图 5.2.1 所示 RLC 串联线性电路。设状态变量为电容电荷 q 和电感磁链 φ ，即 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T = (q \ \varphi)^T$ ；输入为 $u = U$ ，输出为电感电流 $y = i = \varphi / L$ 。电路的 PCHD 模型为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.2.22)$$

式中， $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2C} x_1^2 + \frac{1}{2L} x_2^2$ 为电路的哈密顿函数。

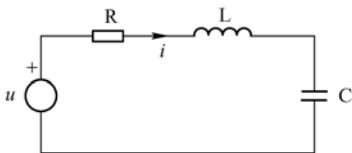


图 5.2.1 RLC 串联线性电路

考虑采用控制器 (5.2.2)，则卡什米尔函数 $C(\mathbf{x}, \xi)$ 满足式 (5.2.10)，有

$$\begin{cases} \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} J_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \\ R \frac{\partial C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_2} = R_c(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \\ \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_1} = -\frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} g_c(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} J_c(\boldsymbol{\xi}) = 0 \\ \frac{\partial C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_1} + \frac{\partial C^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} g_c(\boldsymbol{\xi}) = 0 \end{cases}$$

与例 5.2.1 类似, $C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 与 x_2 无关, 可取 $C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = x_1 - \xi$, 则有 $J_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$ 、 $R_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$ 、 $g_c(\boldsymbol{\xi}) = 1$ 。于是可得控制器

$$C: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u}_c \\ y_c = \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{cases} \quad \boldsymbol{\xi} \in X_c \quad (5.2.23)$$

设期望点 $(x_1^*, 0)$, 对能量成型 $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = H(\mathbf{x}) + H_c(\boldsymbol{\xi}) + \Phi[C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]$, 期望 $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在 $(x_1^*, 0, \xi^*)$ 处有最小值。对此, 选择控制器能量函数 $H_c(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\Phi[C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]$ 分别为

$$H_c(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}(\xi - \xi^*)^2$$

$$\Phi[C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] = \Phi(x_1 - \xi) = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(\xi - \xi^*)^2 \quad k_1 > 0, k_2 > 0$$

当 $k_1 = \frac{1}{C}$ 时, $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 满足式 (5.2.12), 即 $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在 $(x_1^*, 0, \xi^*)$ 处有极值点。当 $1 + k_2 > 1$ 时, $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 满足式 (5.2.13), 即 $V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 在 $(x_1^*, 0, \xi^*)$ 处有最小值。

于是, 标准功率守恒互联, 可得互联控制器

$$C: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{y} \\ y_c = \xi - \xi^* \end{cases} \quad (5.2.24)$$

控制律为

$$u = -\frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} = -\xi + \xi^* \quad (5.2.25)$$

5.2.2 基于循环无源性的端口受控的耗散哈密顿系统互联控制^[24, 25]

1. 循环无源性

受控系统的 PCHD 模型重写为

$$P: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.2.26)$$

注意：与前述 PCHD 系统相比，此处没有假定 H 是半正定的（没有下确界）。为简化标识，定义矩阵 \mathbf{F} ， $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})$ ， \mathbf{F} 满足

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^T = -2\mathbf{R} \leq 0 \quad (5.2.27)$$

PCHD 系统的功率守恒性能由功率平衡方程

$$\dot{H} = -\frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \mathbf{y} \quad (5.2.28)$$

获得。由于 $\mathbf{R} \geq 0$ ，可获得

$$\dot{H} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y} \quad (5.2.29)$$

满足式 (5.2.29) 的系统被称为循环无源的，这区别于 H 是半正定的无源系统。

2. 通过互联控制实现能量成型

在无源控制中，通过相对于期望存储函数和阻尼注入的系统无源性取得控制目标。对一些基本稳定性问题，期望能量函数在平衡点具有最小值，阻尼注入确保能量函数非增长。因此，能量函数可作为 Lyapunov 函数。

(1) 具有外部端口变量的互联控制

具有外部端口变量的互联控制 CBI (Control by Interconnection) 结构如图 5.2.2 所示，图中控制器 C 是通过互联子系统 I 与被控制对象 P 耦合的 PCHD 系统。

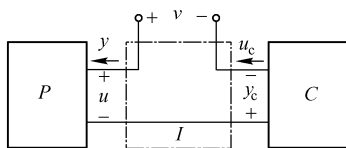


图 5.2.2 具有外部端口变量的互联控制 CBI 结构

对于 $t \geq 0$ ，图 5.2.2 满足功率平衡

$$\mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{y}_c^T(t)\mathbf{u}_c(t) = \mathbf{y}^T(t)\mathbf{v}(t) \quad (5.2.30)$$

式中， \mathbf{v} 为引入的外部信号的互联系统和（可能）注入附加阻尼的端口变量。

选择控制器为简单的积分器（可能是非线性），即

$$C: \begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \end{cases} \quad (5.2.31)$$

式中, ξ 、 u_c 、 $y_c \in R^m$, $H_c: R^m \rightarrow R$ 为由设计者定义的控制能量函数。从

$$\dot{H}_c = u_c^T y_c \quad (5.2.32)$$

可以看出, C 是循环无源的 (实际上是循环无损的)。在控制器 C 中, CbI 假定仅测量装置 P 的输出和固定 I 为标准的负反馈互联

$$I: \begin{pmatrix} u \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.33)$$

显然式 (5.2.33) 满足式 (5.2.30), I_m 为 $m \times m$ 单位矩阵。

联立式 (5.2.29)、式 (5.2.30) 和式 (5.2.32) 可得带有端口变量 (v, y) 的互联系统是循环无源的, 能量函数是装置和控制能量函数的和, 即

$$\dot{H} + \dot{H}_c \leq v^T y \quad (5.2.34)$$

(2) 互联控制能量成型

要完成 CBI 系统能量函数成型, 采用卡什米尔方法, 并寻求整个系统的保守量 (动态不变性)。如果能够找到这些保守量, 就可以利用这些保守量和能量函数构成 Lyapunov 函数。尤其是要寻求独立于能量函数 H 和 H_c 的保守量, 即卡什米尔函数。

应用能量卡什米尔方法分析 CBI (输出反馈) 的稳定性采用如下命题:

命题 5.2.1 考虑 PCHD 系统 P 通过功率守恒互联子系统 I 与控制器 C 耦合。假设存在向量函数 $C: R^n \rightarrow R^m$, 使得

$$\begin{pmatrix} F^T \\ g^T \end{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.35)$$

则对任意函数 $\Phi: R^m \rightarrow R$, 函数 $W: R^n \times R^m \rightarrow R$

$$W(x, \xi) \triangleq H(x) + H_c(\xi) + \Phi[C(x) - \xi] \quad (5.2.36)$$

导致

$$\dot{W} \leq v^T y \quad (5.2.37)$$

因此, 具有存储函数 W 的系统是循环无源的。

证明: 互联系统的动态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & -g \\ g^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H_c}{\partial \xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} gv \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.38)$$

由于 $\dot{C} = \frac{\partial^T C}{\partial x} \dot{x}$, 则有

$$\dot{C} - \dot{\xi} = \left(\frac{\partial^T C}{\partial x} - I_m \right) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} \quad (5.2.39)$$

沿着上述互联闭环系统，并考虑式 (5.2.35)，对任意的 H 和 H_c 可得

$$\dot{C} - \dot{\xi} = 0 \quad (5.2.40)$$

因此， $\dot{\Phi} = 0$ 。

利用式 (5.2.34) 和式 (5.2.36) 可得到证明。

在命题 5.2.1 中，专注于 CBI 能量函数的成型能力，没有特别关注稳定性能。显然，如果能确保期望的平衡点 (x^*, ξ^*) 是 $W(x, \xi)$ 孤立的最小点， W 将作为 Lyapunov 函数。如果 y 是全部系统的可检测输出，填加阻尼能够确保平衡点的渐进稳定性，即设置 $v = -K_p y$ ， $K_p = K_p^T > 0$ 和固定控制器状态的初始值为

$$\xi(0) = \xi^* + C[x(0)] - C(x^*) \quad (5.2.41)$$

初始条件需确保轨迹起于并保持在不变集 Ω_k ($k^* \triangleq \xi^* - C(x^*)$) 内， Ω_k 包含期望平衡点。

3. 耗散障碍

命题 5.2.1 表明，如果能求出卡什米尔函数，即能解偏微分方程 (5.2.35)，通过选择 H_c 和 Φ ，互联系统的能量函数成型是可能的。但偏微分方程的可解性要求系统耗散结构具有严重的约束，这种约束称为耗散障碍。

命题 5.2.2 如果式 (5.2.35) 具有解，则对任意的 $\Phi: R^m \rightarrow R$ 有

$$R \left[\frac{\partial \Phi(C(x) - \xi)}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.2.42)$$

存在。于是，对于不能满足式 (5.2.42) 的阻尼（受物理阻尼影响）的互联系统的能量函数不能成型。

证明：分解式 (5.2.35)，再结合它们，利用 $F(x) = J(x) - R(x)$ 可得

$$F^T \frac{\partial C}{\partial x} = g, g^T \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^T F^T \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^T R \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow R \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

注意， $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x}$ ，则式 (5.2.42) 得到证明。

根据控制器提供给装置的能量函数也可表达耗散障碍。更精确地，具有满秩 F 的 PCHD 系统仅当在平衡点从控制器抽取功率为 0 时，通过 CBI 系统是稳定的。

命题 5.2.3 令 x^* 是通过 CBI 稳定的 PCHD 系统 (5.2.26) 平衡点， u^* 和 y^* 是

相应的输入和输出。如果式 (5.2.35) 具有解和满秩 F ，则有 $u^{*T} y^* = 0$ 。

证明：首先注意，由于 $R \frac{\partial C}{\partial x} = 0$ ，则 $F^T \frac{\partial C}{\partial x} = g$ 等效于 $F \frac{\partial C}{\partial x} = -g$ 。因此，式 (5.2.35) 等效于

$$\begin{cases} F^T \frac{\partial C}{\partial x} = g \\ g^T \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.2.43)$$

相应地，由于 F 逆的存在，可得到 $\frac{\partial C}{\partial x} = -F^{-1} g$ ，则 $R \frac{\partial C}{\partial x} = 0$ 变为

$$R F^{-1} g = 0 \quad (5.2.44)$$

这是存在卡什米尔函数的必要条件。

接着研究 $\dot{x} = F \frac{\partial H}{\partial x} + g u$ 在平衡点的状况，利用式 (5.2.44) 有下列的蕴涵式链

$$\begin{aligned} 0 &= F^* \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* + g^* u^* \Leftrightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = -F^{*-1} g^* u^* \Rightarrow R^* \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = -R^* F^{*-1} g^* u^* \\ &\Rightarrow R^* \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^{*T} R^* \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = 0 \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

在平衡点处，将 $\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^{*T} R^* \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = 0$ 代入功率平衡方程 (5.2.28) 中，可得到期望的结果，即 $\dot{H}^* = u^{*T} y^*$ 。

例 5.2.3 考虑由线性电阻、非线性电容和电压源 u 组成的电路如图 5.2.3 所示。电容的电场能函数 $H(x)$ (x 为电容电荷)、 $\dot{x} = i$ 和 $dH/dx = u_c$ 描述， u_c 和 i 分别是电容的电压和电流。电路的 PCHD 模型为

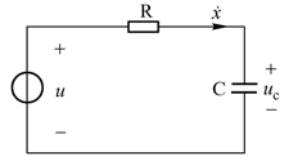


图 5.2.3 非线性 RC 电路

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{R} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{R} u \\ y = \frac{1}{R} \frac{dH}{dx} \end{cases} \quad (5.2.46)$$

在方程 (5.2.46) 中， $J = 0, F = -\frac{1}{R}, R = g = \frac{1}{R}$ ，在此状况下，端口变量是电压 u 和无源输出 $\frac{1}{R} \frac{dH}{dx}$ ，功率平衡方程变为

$$\dot{H} = -\frac{1}{R} \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 + u \frac{1}{R} \frac{dH}{dx} \quad (5.2.47)$$

此方程中所有的项具有功率单位，控制目标是稳定给定的平衡点 $x^* \in R$ 。

可以直接看出，由于 $RF^{-1}g \neq 0$ ，则没有 C 满足卡什米尔条件，式 (5.2.42) 就得不到满足，存在耗散障碍。因此不能用 CBI 解决该问题。

4. 生成新的循环无源性性质

为克服耗散障碍，提出非统一的 PCHD 系统表示方法，以便产生新的无源输出。更精确地讲，寻求满秩矩阵 $F_d: R^n \rightarrow R^{n \times n}$

$$F_d(x) + F_d^T(x) \leq 0 \quad (5.2.48)$$

和存储函数 $H_{ps}: R^n \rightarrow R$ ，则有

$$F(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} = F_d(x) \frac{\partial H_{ps}(x)}{\partial x} \quad (5.2.49)$$

很明显，如果式 (5.2.489) 和式 (5.2.49) 成立，则输出为 $g^T \frac{\partial H_{ps}(x)}{\partial x}$ 的 $\dot{x} = F \frac{\partial H}{\partial x} + gu$ 系统相对于存储函数 H_{ps} 将是循环无源的。这就导致 $g^T \frac{\partial H_{ps}(x)}{\partial x}$ 不能克服耗散障碍，则必须求出称为 y_{ps} 的另一个循环无源输出。有趣的是，在单输入的情况下，可以证明新的循环无源输出 y_{ps} 等于正常的输出 $g^T \frac{\partial H_{ps}(x)}{\partial x}$ 的充分和必要条件恰是无耗散障碍。

(1) y_{ps} 的构造

为确定新的循环无源输出，引用引理 5.2.1。

引理 5.2.1 (Poincare 引理) 对于给定 $f: R^n \rightarrow R^n$ ， $f \in C^1$ 。当且仅当

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^T f}{\partial x} \text{ 时，存在 } \psi: R^n \rightarrow R, \text{ 使 } \frac{\partial \psi}{\partial x} = f。$$

构造循环无源输出要求 F_d 是满秩的且满足 Poincare 引理。确定新的循环无源输出的步骤见命题 5.2.4。

命题 5.2.4 对满足式 (5.2.45) 的偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F_d^{-1} F \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial^T}{\partial x} \left(F_d^{-1} F \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (5.2.50)$$

的所有解 F_d ，存在存储函数 H_{ps} 使 PCHD 系统

$$PS: \begin{cases} \dot{x} = F(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\ y_{ps} = -g^T(x) F_d^{-T}(x) F(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} - g^T(x) F_d^{-T}(x) g(x)u \end{cases} \quad (5.2.51)$$

满足循环无源性不等式

$$\dot{H}_{\text{PS}} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y}_{\text{PS}} \quad (5.2.52)$$

证明：Poincare 引理表明式 (5.2.50) 是 H_{PS} 存在的必要与充分条件，则有

$$\frac{\partial H_{\text{PS}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.53)$$

式 (5.2.53) 等效于式 (5.2.49)。于是，有下列蕴涵式链：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d \frac{\partial H_{\text{PS}}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{F} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_d \frac{\partial H_{\text{PS}}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{F}_d^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_{\text{PS}}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \dot{H}_{\text{PS}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \Rightarrow -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_d^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \dot{H}_{\text{PS}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (5.2.54) \\ &\Rightarrow 0 \geq \dot{H}_{\text{PS}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \Rightarrow \dot{H}_{\text{PS}} \leq -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

利用式 (5.2.51) 中的 $\dot{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{y}_{PS} 的定义可得

$$\mathbf{y}_{\text{PS}} = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \quad (5.2.55)$$

根据 $\mathbf{y}_{\text{PS}} = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = -[\mathbf{F}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T (\dot{\mathbf{x}}^T)^T = -(\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T$ ，式 (5.2.52) 得证。

(2) $\mathbf{y}_{\text{PS}} = \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 成立的条件及耗散的作用

如前所述，如果式 (5.2.48) 和式 (5.2.49) 成立， $\mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 是循环无源输出，则可应用 CBI 研究具有端口变量 $\left(\mathbf{u}, \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$ 的系统。引入常规的标注 $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_d^T(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_d^T(\mathbf{x}) \geq 0$ ；通过一些简单的计算，能够证明在这种情况下存在卡什米尔函数的必要条件为

$$\mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} = 0 \quad (5.2.56)$$

与式 (5.2.43) 比较，式 (5.2.56) 仍对阻尼施加限制。下面要说明，对 \mathbf{y}_{PS} (代替 $\mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$) 应用 CBI，可消除此限制。有趣的是，命题 5.2.5 将证明当且仅当式 (5.2.56) 不成立时，命题 5.2.4 将有新的无源输出。对此，需要引理 5.2.2。

引理 5.2.2 $\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}$ 。

证明：根据 $\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} = \mathbf{g}^T (\mathbf{J}_d^{-T} - \mathbf{R}_d^{-T}) \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{g}$ ， $\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{g}^T (\mathbf{J}_d^{-1} - \mathbf{R}_d^{-1}) \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{g}$ 可得

$$\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T (\mathbf{F}_d^{-T} + \mathbf{F}_d^{-1}) \mathbf{g} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} (\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_d^T) \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g}$$

根据 $\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_d^T = -2\mathbf{R}_d$ ，引理得到证明。

命题 5.2.5 在单输入单输出的情况下，当且仅当具有端口变量 $\left(\mathbf{u}, \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$

的 PCHD 系统不存在耗散障碍时，新的无源输出 \mathbf{y}_{PS} 等效于 $\mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ，也就是

$$\mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \left(\mathbf{F}_d \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \mathbf{u} \right) (= \mathbf{y}_{\text{PS}}) \quad (5.2.57)$$

证明：由式 (5.2.51) 和式 (5.2.49) 中 \mathbf{y}_{PS} 的定义，有

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{PS}} &= -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \left[\mathbf{F}_d \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \mathbf{u} \right] + \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} (\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_d^T) \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} \mathbf{u} + \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{R}_d \left[2 \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} \mathbf{u} \right] + \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

(式中利用了等式 $\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g}$ ， $\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{R}_d = (\mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g})^T$ 。)

此式中，在第一个等式中加一个 $\mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ，减一个 $\mathbf{g}^T \frac{\partial H_{\text{PS}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ，利用引理 5.2.2 获得第三个等式。

注意：当且仅当 $\mathbf{R}_d \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{g} = 0$ 时，在最后一个方程右边的第一项和第二项之和为零，命题 5.2.5 得证。

5. PS 系统的互联控制

在这里对新的 PCHD 系统 PS 应用 CBI 方法，并表明在出现耗散的场合仍能进行成型。更精确地说，能消除式 (5.2.35) 中卡什米尔函数存在的第二个条件 $\mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} = 0$ ，则可排除耗散障碍 $\mathbf{R} \frac{\partial \Phi[\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}]}{\partial \mathbf{x}} = 0$ 。为区分由 P 获得的控制器 CBI，把 PS 获得的控制器表示为 CBI_{PS} 。此外，为便于区别两种变化，当 $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}$ 时，控制器称为基本 CBI_{PS} ；当 $\mathbf{F}_d \neq \mathbf{F}$ 时，控制器称为 CBI_{PS} 。

CBI_{PS} 克服耗散障碍见命题 5.2.6。

命题 5.2.6 假设偏微分方程 (5.2.50) 有解 \mathbf{F}_d ，并满足式 (5.2.48)，则对一些向量函数 $\mathbf{C}: R^n \rightarrow R^m$ ，使得

$$\mathbf{F}_d \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{g} \quad (5.2.59)$$

考虑 PCHD 系统 (5.2.51)，通过功率守恒互联子系统

$$PSI: \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{ps} \\ \mathbf{y}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.2.60)$$

与 PCHD 控制器 C 耦合。则对任意函数 $\Phi: R^m \rightarrow R$ ，循环无源性不等式为

$$\dot{W}_{ps} \leq \mathbf{v}^T \mathbf{y}_{ps} \quad (5.2.61)$$

式中，存储函数 $W_{ps}: R^n \times R^m \rightarrow R$ 定义为

$$W_{ps}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \triangleq H_{ps}(\mathbf{x}) + H_c(\boldsymbol{\xi}) + \Phi[(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}] \quad (5.2.62)$$

式中， $H_{ps} = \int \left(\mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x}$ (见式 (5.2.53))。

证明：该证明直接模仿命题 5.2.1 的证明。互联系统动态方程描述为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_d & -\mathbf{g} \\ -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{F}_d & \mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{ps}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ -\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{g} \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (5.2.63)$$

计算时间导数

$$\dot{C} - \dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\frac{\partial^T C}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{I}_m \right) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = (-\mathbf{g}^T \mathbf{F}_d^{-T} \quad -\mathbf{I}_m) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.2.64)$$

式中第二方程部分是根据式 (5.2.59) 得到的，最后方程部分对任意的 H_{ps} 、 H_c 成立。因此， $\dot{\Phi} = 0$ 。上述与式 (5.2.32)、式 (5.2.52) 及式 (5.2.62) 结合在一起，可完成证明。

在参考文献[26]中，在分析 PCHD 系统稳定性的情况下，用下列方法可构造循环无源输出 \mathbf{y}_{ps} 。设能找到的 C 满足

$$\mathbf{F} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{g} = 0 \quad (5.2.65)$$

现在构造增广系统的互联和耗散矩阵为

$$\mathbf{J}_a \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{J} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial^T C}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} & \frac{\partial^T C}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}_a^T \quad (5.2.66)$$

$$\mathbf{R}_a \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial^T C}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R} & \frac{\partial^T C}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_a^T \geq 0 \quad (5.2.67)$$

式中的 C 、 \mathbf{J}_a 、 \mathbf{R}_a 满足

$$\left(\frac{\partial^T \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{I}_m \right) \mathbf{J}_a = \left(\frac{\partial^T \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{I}_m \right) \mathbf{R}_a = 0 \quad (5.2.68)$$

这就意味着 $\mathbf{C} - \xi$ 是 PCHD 系统

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = (\mathbf{J}_a - \mathbf{R}_a) \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (5.2.69)$$

是卡什米尔函数。

此外, 考虑式 (5.2.65), 有

$$\mathbf{J}_a - \mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{J} - \mathbf{R} & -\mathbf{g} \\ \left(\mathbf{g} - 2\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{J} - \mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (5.2.70)$$

因此, 增广系统是具有不同输出的非线性积分器和 PH 装置的单一反馈互联系统, 对于 $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}$, 便得到 \mathbf{y}_{ps} 。有趣的是, 这些推导不能推测 \mathbf{F} 的可逆性。

例 5.2.4 由例 5.2.3 可知, 图 5.2.3 所示非线性 RC 电路 $\mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{g} = -1/R \neq 0$ PCHD 系统存在耗散障碍, 不能进行 CBI, 意味着 $y \neq y_{ps}$ 。因此, 使用 CBI_{ps} 进行系统设计。

使用基本 CBI_{ps} , 即 $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}$, 从而新的系统为

$$PS: \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{R} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{R} u \\ y_{ps} = -\frac{1}{R} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{R} u \end{cases} \quad (5.2.71)$$

式中, $H_{ps} = H$ 。

对 CBI_{ps} 卡什米尔函数是 $F \frac{\partial C}{\partial x} = -g$ 的解, 在此例中 $F = 1/R$, 所以

$$C(x) = x \quad (5.2.72)$$

将是卡什米尔函数。现在寻找函数 H_c 、 Φ , 使得

$$W_{ps}(x, \xi) = H(x) + H_c(\xi) + \Phi(x - \xi) \quad (5.2.73)$$

在给定平衡点 $(x^*, 0)$ 有孤立的最小值 (为简单起见, 取 $\xi^* = 0$)。

$$\text{令} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial W_{ps}}{\partial x} \right)^* = 0 \\ \left(\frac{\partial W_{ps}}{\partial \xi} \right)^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^* = -u^* \\ \left(\frac{\partial H_c}{\partial \xi} \right)^* = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^* = -u^* \end{cases} \quad (5.2.74)$$

则 W_{ps} 在给定平衡点 $(x^*, 0)$ 有极值。

经一些简单的推导，当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} > -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} > -\frac{\partial^2 H_c}{\partial \xi^2} \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_c}{\partial \xi^2} \right) > \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 \end{cases} \quad (5.2.75)$$

海森矩阵为正定的。

为简单起见，确定二次型

$$H_c = \frac{1}{2C_c} (\xi - C_c u^*)^2 \quad (5.2.76)$$

式中， $C_c \in R_+$ ，满足式 (5.2.74) 的第二个条件。

为求 Φ ，采用二阶多项式 $\Phi(z) = (\beta/2)z^2 + \gamma z$ ， $(z = x - \xi)$ ， β 、 γ 是定义的常数。式 (5.2.74) 第一个条件对自由参数施加下列约束： $\beta x^* + \gamma = -u^*$ 。在平衡点评估式 (5.2.75)，得出

$$\begin{cases} \beta > -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)^* \\ \frac{1}{C_c} > \frac{\beta^2}{\beta + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)^*} \end{cases} \quad (5.2.77)$$

可以看出，对所有的 $C_c > 0$ ，Lyapunov 函数为 $W_{ps}(x, \xi) - W_{ps}(x^*, \xi^*)$ ，如果 $(\partial^2 H / \partial x^2)^* > 0$ ，可取 $\beta = 0$ ，平衡点 $(x^*, 0)$ 将是稳定的。此处有

$$W_{ps}(x, \xi) = H(x) + \frac{1}{2C_c} (\xi - C_c u^*)^2 - u^* (x - \xi) \quad (5.2.78)$$

根据式 (5.2.31)、式 (5.2.33) 及式 (5.2.71) 可得控制器为

$$PS + I: \begin{cases} \dot{\xi} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} + u^* - \frac{1}{C_c} \xi + v \right) \\ u = u^* - \frac{1}{C_c} \xi + v \end{cases} \quad (5.2.79)$$

图 5.2.3 所示非线性 RC 电路的 CBI_{PS} 如图 5.2.4 所示, 与恒定电源 u^* 串联具有电荷 ξ 的电容 C_c 并与图 5.2.3 系统相连可作为控制器的物理解释。

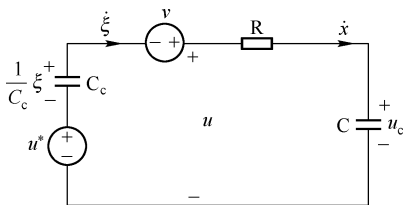


图 5.2.4 具有 CBI_{PS} 控制器的非线性 RC 电路

5.2.3 基于无源性的端口受控的耗散哈密顿系统互联控制^[27~30]

1. PCHD 模型的变换

系统的 PCHD 模型重写如下:

$$P: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad \mathbf{x} \in X \quad (5.2.80)$$

在一些实际工程应用中, 采用 PCHD 模型进行控制器设计往往很复杂。对此, 采用互联和阻尼分配无源控制 IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control) 方法进行控制器设计。

考虑仿射非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5.2.81)$$

假设存在矩阵 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_d^T(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_d^T(\mathbf{x}) \geq 0$ 及函数 $H_d: R^n \rightarrow R$ 满足偏微分方程

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.82)$$

式中, $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的左消除满秩矩阵, 即 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$; $H_d(\mathbf{x})$ 使得

$$\mathbf{x}^* = \arg \min H_d(\mathbf{x}) \quad (5.2.83)$$

式中, $\mathbf{x}^* \in R^n$ 是被稳定的平衡点。

于是, 当控制输入为

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \left\{ \left[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \right] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.2.84)$$

的闭环系统 (5.2.81) PCHD 模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \right] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.85)$$

并具有 (局部) 稳定平衡点 \mathbf{x}^* 。

另外, 如果 \mathbf{x}^* 是 $H_d(\mathbf{x})$ 的孤立最小值, 且闭环系统 (5.2.85) 的含于

$$\left\{ \mathbf{x} \in R^n \left| \frac{\partial^T H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \right. \right\} \quad (5.2.86)$$

内的最大不变集等于 $\{\mathbf{x}^*\}$ 。由最大有界水平集 $\{\mathbf{x} \in R^n | H_d(\mathbf{x}) \leq c\}$ 给出吸引域的估计。

证明: 将式 (5.2.84) 代入式 (5.2.81) 可得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \right] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.87)$$

用 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 左乘式 (5.2.87) 可得式 (5.2.82)。左乘 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的伪逆矩阵 $\mathbf{g}^+(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right]^{-1} \mathbf{g}^T(\mathbf{x})$ 可获得控制的表达式。

由式 (5.2.85) 可得

$$\dot{H}_d = \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \right] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \leq 0$$

此处, $H_d(\mathbf{x})$ 可作为 Lyapunov 函数。由 La Salle's 不变集定理和条件 (5.2.86) 立即可得渐进稳定性。最后, 为确保解有界, 把吸引域的估计视为 $H_d(\mathbf{x})$ 的最大有界水平集。

2. IDA-PBC 控制器设计

不失一般性地, 给定 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 和期望稳定的平衡点 $\mathbf{x}^* \in R^n$ 。假设能找到函数 $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{J}_a(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_a(\mathbf{x})$ 和一个向量函数 $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 满足

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{J}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})] + \mathbf{J}_a(\mathbf{x}) - [\mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_a(\mathbf{x})] \right\} \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \\ & - [\mathbf{J}_a(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_a(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (5.2.88)$$

且使得:

① 结构守恒，即

$$\begin{cases} \mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})] + \mathbf{J}_a(\mathbf{x}) = -\{\mathbf{J}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})] + \mathbf{J}_a(\mathbf{x})\}^T \\ \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_a(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_a(\mathbf{x})]^T \geq 0 \end{cases} \quad (5.2.89)$$

② 可积性，即 $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 是标量函数的梯度，满足

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (5.2.90)$$

③ 在期望平衡点 \mathbf{x}^* 处， $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 满足

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^*) = -\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (5.2.91)$$

式 (5.2.91) 是 $H_d(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^* 存在极值的条件。

④ Lyapunov 稳定性，即在 \mathbf{x}^* ， $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 的雅克比满足

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} > -\frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (5.2.92)$$

式 (5.2.92) 是 $H_d(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^* 存在最小值的条件。

在这些条件下，闭环系统将具有式 (5.2.85) 耗散形式的 PCHD 系统， \mathbf{x}^* 为闭环系统一个稳定的平衡点。

能量函数 $H_d(\mathbf{x})$ 和 $H_a(\mathbf{x})$ 为

$$\begin{cases} H_d(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) + H_a(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial H_a(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.2.93)$$

并满足 (5.2.86)。

$H_a(\mathbf{x})$ 为一个待定函数，表示通过控制注入到系统的能量。

3. IDA-PBC 性能

(1) 能量平衡

当 PCHD 系统具有合适的阻尼时，IDA-PBC 的稳定机理就一目了然。事实上，如果 PCHD 系统的自然阻尼满足

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0 \quad (5.2.94)$$

和没有附加阻尼注入，即 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})$ 。根据式 (5.2.80)、式 (5.2.85)、式 (5.2.93) 及式 (5.2.94) 中的第一个式子，可得

$$\dot{H}_a(\mathbf{x}) = \dot{H}_d(\mathbf{x}) - \dot{H}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial H^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = -\mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad (5.2.95)$$

则沿着闭环系统轨迹，期望的能量函数可表达为

$$H_d[\mathbf{x}(t)] = H[\mathbf{x}(t)] - \int_0^t \mathbf{y}^T(s) \mathbf{u}(s) ds \quad (5.2.96)$$

由式 (5.2.96) 可知，IDA-PBC 分配的期望能量函数是系统存储的能量和外部供给的能量之差，即能量平衡。

即使式 (5.2.94) 不能得到满足时，IDA-PBC 的控制作用可认为能量平衡的。如果互联和阻尼不能改变，即 $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})$ 为满秩的，当输出 \mathbf{y} 由“新的”输出

$$\tilde{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x})(\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}))^T \left\{ [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \right\} \quad (5.2.97)$$

替代时， $H_d[\mathbf{x}(t)]$ 应能满足式 (5.2.96)。

(2) 广义稳定性能

在前面的论述中，可以看出控制器设计的成功取决于求解偏微分方程的能力。一般来讲，不能提供偏微分方程解存在的明确条件。对此，本部分要证明在某种意义上 IDA-PBC 方法是广义稳定的，能够设计出 PCHD (5.2.80) 的渐进稳定的控制器。

如果系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1$ 有渐进稳定平衡点 \mathbf{x}^* ，则存在 C^1 正定函数 $H_d(\mathbf{x})$ 和矩阵函数 $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ 定义为

$$\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \triangleq - \frac{1}{\left| \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|^4} \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.98)$$

$$\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{\left| \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|^2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \right] \quad (5.2.99)$$

则有 $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_d^T(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_d^T(\mathbf{x}) \geq 0$ 使得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})] \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.2.100)$$

成立。于是可得

$$\dot{H}_d(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = - \frac{\partial H_d^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \leq 0 \quad (5.2.101)$$

式 (5.2.101) 说明了 IDA-PBC 方法的广义稳定性。

(3) $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 的选择

适当地选择 $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 是参数化和非参数化 IDA-PBC 所必备的。

从纯计算观点看, $J_d(\mathbf{x})$ 、 $R_d(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 可比作用于简化偏微分方程 (5.2.82) 解的“附加控制作用”。例如, 选择 $J_d(\mathbf{x})$ 、 $R_d(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})$ 满足可积性条件, 使

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})[J_d(\mathbf{x}) - R_d(\mathbf{x})]\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (5.2.102)$$

式 (5.2.82) 是可解性所必需的。然而, 这种纯分析的观点在实际中很少应用, 且与关于这种应用相关的有效丰富的知识配合才可获得圆满的效果 (尤其是处理实际物理系统时)。

有时, 人们自然地把控制作用分为能量成型和阻尼注入, 相应地有 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{es}} + \mathbf{u}_{\text{di}}$ 。对此, 设定矩阵 $R_d(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})K_v\mathbf{g}^\top(\mathbf{x})$, $K_v > 0$ 。于是, 偏微分方程变为

$$\mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})J_d(\mathbf{x})\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{g}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.2.103)$$

和

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\text{es}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}^\top(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{g}^\top(\mathbf{x})\left[J_d(\mathbf{x})\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\right] \\ \mathbf{u}_{\text{di}}(\mathbf{x}) = -K_v\mathbf{g}^\top(\mathbf{x})\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.2.104)$$

基于引入阻尼的观点, 这种分割可对其他的稳定系统实现渐进稳定性。这种观点是受限制的且阻尼可以用来获得其他控制目的。

对于系统 (5.2.82), 当控制输入为 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$ 时, \mathbf{v} 由下式确定:

$$\dot{\mathbf{v}} = -K_i\mathbf{g}^\top(\mathbf{x})\frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad K_i = K_i^\top > 0 \quad (5.2.105)$$

则上述 \mathbf{x}^* 的稳定性都能得到保证。显然, 此时闭环系统的 PCHD 模型为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_d - R_d & \mathbf{g}(\mathbf{x})K_i \\ -K_i\mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}} \end{pmatrix} \quad (5.2.106)$$

式中, $W(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = H_d(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^\top K_i^{-1}\mathbf{v}$ 可作为 Lyapunov 函数。

例 5.2.5 DC/DC 升压斩波电路如图 5.2.5 (a) 所示。当 $u_g = 1$ (高电平) 时, 开关管 V 导通, 电感 L 存储磁场能, VD 关断, 电容 C 向负载 R 放电; 当 $u_g = 0$ (低电平) 时, V 关断, VD 导通, 电源与电感 L 存储磁场能一同向负载 R 及电容 C 供电。根据上述工作过程, 等效电路图如 5.2.5 (b) 所示。

① 电路模型建立

取电感磁链 φ 和电容电荷 q 为状态变量, 即 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^\top = (\varphi \ q)^\top$ 。电路的动

态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (u_g - 1) \frac{x_2}{C} + E \\ \dot{x}_2 = (1 - u_g) \frac{x_1}{L} - \frac{x_2}{RC} \end{cases} \quad (5.2.107)$$

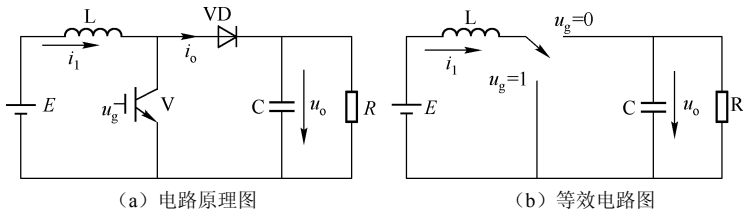


图 5.2.5 DC/DC 升压斩波电路

式中, $u_g = 1$ 或 $u_g = 0$, 反映了瞬时动态。由于 DC/DC 升压斩波电路采用 PWM 信号驱动, 即 u_g 为 PWM 信号。设 u_g 的占空比为 $u_r \in (0, 1)$, 则采用占空比 u_r 描述的斩波电路平均动态方程, 用 x_1 、 x_2 表示平均值, 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -v \frac{x_2}{C} + E \\ \dot{x}_2 = v \frac{x_1}{L} - \frac{x_2}{RC} \end{cases} \quad (5.2.108)$$

式中, $v = 1 - u_r$ 为与占空比相关的驱动信号。

由式 (5.2.108) 可得斩波电路的 PCHD 模型

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -v \\ v & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \\ y = \frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [(\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \mathcal{R})] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \\ y = \frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \quad (5.2.109)$$

式中, $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2L} x_1^2 + \frac{1}{2C} x_2^2$ 为电路的存储函数。

注意: v 不是端口变量。斩波电路的控制目标是驱动输出电容器电压达到期望值 $U_d > E$, 保证内稳定性。根据式 (5.2.108) 及期望输出电容电压 U_d 可得斩波电

路期望的平衡点为 $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{LU_d^2}{RE}, CU_d \right)$, 相应地 $v^* = \frac{E}{U_d}$ 。

② 自然互联和阻尼控制器

由于 $\mathbf{J}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_a(\mathbf{x}) = 0$ ，根据式 (5.2.88) 可得

$$[\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \mathbf{R}]\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k_1(\mathbf{x}) \\ k_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \mathbf{R})^{-1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.110)$$

根据式 (5.2.110) 和式 (5.2.109) 可得

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k_1(\mathbf{x}) \\ k_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E}{\beta^2(\mathbf{x})R} \\ -\frac{E}{\beta(\mathbf{x})} \end{pmatrix} \quad (5.2.111)$$

在这种情况下，根据式 (5.2.90) 可积性，本例的可积性条件为

$\frac{\partial k_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial k_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ ，由此可得非线性偏微分方程为

$$\frac{\partial k_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{2}{RE} k_2(\mathbf{x}) \frac{\partial k_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0 \quad (5.2.112)$$

经标准的计算工具可得简单微分方程 (5.2.112) 的解为

$$k_2(\mathbf{x}) = \frac{c_1 x_2 + c_3}{[2/(RE)]c_1 x_1 + c_2} \quad (5.2.113)$$

式中， c_1 、 c_2 及 c_3 为任意常数。

把式 (5.2.113) 代入式 (5.2.111)，定义控制律

$$\mathbf{v} = \beta(\mathbf{x}) = -E \left\{ \frac{[2/(RE)]c_1 x_1 + c_2}{c_1 x_2 + c_3} \right\} \quad (5.2.114)$$

为满足式 (5.2.91)，在平衡点研究式 (5.2.114)。根据 x_1^* 、 x_2^* 及 \mathbf{v}^* 可得与 c_1 、 c_2 及 c_3 相关的线性函数

$$c_2 = -c_1 \left(\frac{2LU_d^2}{R^2 E^2} + C \right) - \frac{c_3}{U_d} \quad (5.2.115)$$

有趣的是，如果在式 (5.2.114) 和式 (5.2.115) 中设 $c_1 = 0$ ，就恢复了开环控制 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = \frac{E}{U_d}$ 。

如果 $c_3 < 0$ ， $c_3 \left(\frac{R^2 E^2}{4LU_d^3} \right) < c_1 < c_3 \left(\frac{1}{CU_d} \right)$ 或 $c_3 > 0$ ， $-c_3 \left(\frac{1}{CU_d} \right) < c_1 < -c_3 \left(\frac{R^2 E^2}{4LU_d^3} \right)$

海森条件 (5.2.92) 得到满足。

再次强调，不需要计算 Lyapunov 函数 $H_d(\mathbf{x})$ 。然而，计算 $H_d(\mathbf{x})$ 如下：
首先求 $H_a(\mathbf{x})$ ，根据式 (5.2.93) 可得

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_a(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(c_1 x_2 + c_3)^2}{ER \{ [2/(RE)] c_1 x_1 + c_2 \}^2} \\ \frac{c_1 x_2 + c_3}{[2/(RE)] c_1 x_1 + c_2} \end{pmatrix} \quad (5.2.116)$$

由式 (5.2.116) 可求得

$$H_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c_1} \frac{(c_1 x_2 + c_3)^2}{[2/(RE)] c_1 x_1 + c_2} \quad (5.2.117)$$

$$\text{于是 } H_d(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) + H_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2L} x_1^2 + \frac{1}{2C} x_2^2 + \frac{1}{2c_1} \frac{(c_1 x_2 + c_3)^2}{[2/(RE)] c_1 x_1 + c_2} \quad (5.2.118)$$

为使 $H_d(\mathbf{x})$ 在平衡点处 $H_d(\mathbf{x}^*) = 0$ ，不影响 $\dot{H}_d(\mathbf{x})$ ，在式 (5.2.118) 中加两个常数项，闭环系统的存储函数变为

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2L} x_1^2 + \frac{1}{2C} x_2^2 + \frac{1}{2c_1} \frac{(c_1 x_2 + c_3)^2}{[2/(RE)] c_1 x_1 + c_2} - \frac{LU_d^4}{2R^2 E^2} + \frac{U_d c_3}{2c_1} \quad (5.2.119)$$

③ 具有阻尼分配的控制器

尽管上述控制器能够确保一些稳定性能，但它可能对未知负载和时变负载是敏感的。下面通过改变阻尼结构可克服上述两个缺点。选择注入阻尼矩阵为 $\mathbf{R}_a = \text{diag}\{R_a, -1/R\}$ ， $R_a > 0$ ，则闭环阻尼矩阵为 $\mathbf{R}_d = \text{diag}\{R_a, 0\}$ 。于是根据式 (5.2.88) 可得

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{RC} \\ -\frac{x_1}{L} R_a - \frac{R_a}{RC} \frac{x_2}{\beta(\mathbf{x})} - E \end{pmatrix} \quad (5.2.120)$$

考虑 $\beta(\mathbf{x})$ 仅是 x_2 的函数，可积性条件 $\frac{\partial k_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial k_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ 简化为

$$\frac{\partial \beta(x_2)}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{x_2} \beta(x_2) \quad (5.2.121)$$

式中， $\alpha \triangleq 1 - \frac{RR_a C}{L}$ 。

用分离变量法解式 (5.2.121) 可得 $\beta(x_2) = c_1 x_2^\alpha$ ， c_1 为常数，根据分配的平衡

点选 $c_1 = v^* / x_2^{*\alpha}$ 。现在，要确保 x^* 不正好是 $H_d(\mathbf{x})$ 的极值点但是最小点，需研究 x^* 处的海森矩阵，并在 $-1 < \alpha < 1$ 情况下验证海森矩阵的正定性。在上述推导过程中，已假设 $J[\beta(x)] - R_d$ 是可逆的，即 $x_2 \neq 0$ 。另一方面，斩波电路仅在正的象限有实际物理意义。容易看出，限制 $0 < \alpha < 1$ ， $x_2 \equiv 0$ 是闭环系统的动态轨迹。不幸地，这并不意味着起于 $x_2 > 0$ 半平面的轨迹将保留在那里，因为闭环系统向量场在 $x_2 = 0$ 处不连续和解的唯一性不能得到更多的保证。更多的详细分析揭示，可定义含于 x^* 吸引域内的初始条件集，使闭环系统的轨迹保留在正的象限内。此外，可证明存在一个 α 值可使控制信号 $v(t)$ 在集 $(0,1)$ 内变化。

总之，输出反馈 IDA-PBC

$$v = \beta(x_2) = v^* \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^* \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (5.2.122)$$

对所有负载电阻 $R > 0$ ，满足物理约束的情况下，斩波电路可渐进稳定于 x^* 。

5.3 时变端口受控的耗散哈密顿系统^[31~34]

在实际工程中，许多控制问题需设计基于时变 PCHD 系统的各种有效控制器，因此，时变 PCHD 系统日益受到人们的关注。时变 PCHD 系统的模型为

$$P(t): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad \mathbf{x} \in X \quad (5.3.1)$$

式中， $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 为反对称时变矩阵； $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ 为半正定时变矩阵。

根据系统的模型 (5.3.1)，本节主要通过卡什米尔函数研究系统的稳定性及控制器。同时，对于非时变 PCHD 模型的系统，研究如何转换成时变 PCHD 模型，进而进行控制器设计。

5.3.1 时变 PCHD 系统的稳定性及控制器

1. 时变 PCHD 系统的标准反馈互联控制及卡什米尔函数

(1) 时变 PCHD 系统的标准反馈互联控制

按照 5.2 节中的思路，设

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (5.3.2)$$

则有

$$P(t): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad \mathbf{x} \in X \quad (5.3.3)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad (5.3.4)$$

事实上, 对任意矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 有

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)] \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$$

$$\text{式中, } \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \triangleq \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \triangleq -\frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)].$$

设时变控制器

$$C(t): \begin{cases} \dot{\xi} = (\mathbf{J}_c(\xi, t) - \mathbf{R}_c(\xi, t)) \frac{\partial H_c(\xi, t)}{\partial \xi} + \mathbf{g}_c(\xi, t) \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{g}_c^T(\xi, t) \frac{\partial H_c(\xi, t)}{\partial \xi} \end{cases} \quad \xi \in X_c \quad (5.3.5)$$

受控系统 $P(t)$ 与控制器 $C(t)$ 通过标准 (功率守恒) 反馈互联

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{y}_c \\ \mathbf{u}_c = \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

通过标准 (功率守恒) 反馈互联构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) & -\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\xi, t) \\ \underbrace{\mathbf{g}_c(\xi, t) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{J}_c(\xi, t)}_{\mathbf{J}_{cl}(\mathbf{x}, \xi, t)} & \mathbf{J}_c(\xi, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) & 0 \\ 0 & \underbrace{\mathbf{R}_c(\xi, t)}_{\mathbf{R}_{cl}(\mathbf{x}, \xi, t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\xi, t)}{\partial \xi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_c(\xi, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\xi, t)}{\partial \xi} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.3.7)$$

式 (5.3.7) 仍是一个端口受控的耗散哈密顿系统, 其状态空间为乘积空间 $\mathbf{X} \times \mathbf{X}_c$, 总的哈密顿函数为 $H(\mathbf{x}, t) + H_c(\xi, t)$ 。

(2) 卡什米尔函数

由于时变 PCHD 模型的系统的结构矩阵是时变的, 则要求卡什米尔函数为与时间无关的。若取函数的形式为 $\xi - C(\mathbf{x})$, $\xi - C(\mathbf{x})$ 是系统 (5.3.7) 的卡什米尔函数的充分与必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_c(\boldsymbol{\xi}, t) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{R}_c(\boldsymbol{\xi}, t) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{C}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}_c(\boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (5.3.8)$$

由于式 (5.3.8) 中的第二个方程是很难满足的。因此，不用第二个条件，将使卡什米尔函数选择具有更大的自由度。在此情况下，如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 是可逆的，对于系统 (5.3.3) 引入新的输出函数

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.3.9)$$

对于系统 (5.3.3) 有扩展矩阵

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \begin{pmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} \quad (5.3.10)$$

式中， $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 为 $n \times n_c$ 矩阵。

若存在函数 $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = (C_1(\mathbf{x}), \dots, C_{n_c}(\mathbf{x}))$ 满足 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ，则 $\xi_i - C_i(\mathbf{x})$ ($i=1, 2, \dots, n_c$) 是系统 (5.3.10) 的卡什米尔函数。

证明：直接计算

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^T \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \Rightarrow -\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ 论题}$$

得证。

假设存在 $n_c \times m$ 矩阵 $\mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t)$ ，使 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t)$ ，则系统 (5.3.3) 的闭环控制方程^[18]为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\xi_i = c_i(\mathbf{x}) + d_i} \quad (5.3.11)$$

式中， $d_i (i=1, 2, \dots, n_c)$ 为取决于系统 (5.3.10) 初始值的常数。

当下列等式：

$$\begin{cases} J_c(\xi, t) = B^T(x)J(x, t)B(x) \\ R_c(\xi, t) = B^T(x)R(x, t)B(x) \\ g_c(\xi, t) = g_c(x, t) \end{cases} \quad (5.3.12)$$

成立时, 具有控制方程 (5.3.11) 的系统 (5.3.1) 与控制器 (5.3.5) 通过标准 (功率守恒) 反馈互联形成的闭环系统 (5.3.7) 和系统 (5.3.10) 等效。

2. 时变 PCHD 系统的稳定性

考虑系统 (5.3.1), 如果选择系统的输出为

$$\bar{y} = g^T(x, t) \frac{\partial H_d(x, t)}{\partial x} \quad (5.3.13)$$

则有下列结果:

定理 5.3.1 假设①存在函数 $C_1(x) + d_1, \dots, C_{n_c}(x) + d_n$ 和 $H_c(\xi, t): R^{n_c+1} \rightarrow R$ 使得

$$H_d(x, t) \triangleq H(x, t) + H_c[C_1(x) + d_1, \dots, C_{n_c}(x) + d_n, t] \geq H_d(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial H_c}{\partial t}[C_1(x) + d_1, \dots, C_{n_c}(x) + d_n, t] \leq 0$$

② 存在 $n_c \times m$ 矩阵 $g_c(x, t)$ 使得

$$F(x, t) \frac{\partial C(x)}{\partial x} = -g_c(x, t) g_c^T(x, t)$$

式中, $C(x) = [C_1(x) + d_1, \dots, C_{n_c}(x) + d_n]^T$ 。

则控制律

$$u(x, t) = -g_c^T(x, t) \frac{\partial H_c(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_i = C_i(x) + d_i} + v \quad (5.3.14)$$

致使具有存储函数 $H_d(x, t)$ 的 $v \rightarrow \bar{y}$ 映射是无源的。此外, 如果 $H_d(x, t)$ 是正定的, $v = 0$ 时的闭环系统是稳定的。

证明: ①根据前面的讨论, 具有控制方程 (5.3.14) 的系统 (5.3.1) 的闭环系统为

$$\dot{x} = [J(x, t) - R(x, t)] \frac{\partial H_d(x, t)}{\partial x} + g(x, t)v \quad (5.3.15)$$

此外

$$\dot{H}_d = \frac{\partial H_d}{\partial t} - \frac{\partial^T H_d}{\partial x} R(x, t) \frac{\partial H_d}{\partial x} + \bar{y}^T v \leq -\frac{\partial^T H_d}{\partial x} R(x, t) \frac{\partial H_d}{\partial x} + \bar{y}^T v \quad (5.3.16)$$

意味着输入输出映射 $\mathbf{v} \rightarrow \bar{\mathbf{y}}$ 是无源的。

② 很明显，第二论述是真的。

由于系统是依赖于时间的，通常 La Salle 不变集定理是不能用的。因此，定理 5.3.1 的条件不能保证渐进稳定性，必须找一些其他条件确保系统的渐进稳定性。

引理 5.3.1 考虑系统 (5.3.1)，假设①哈密顿函数 $H(\mathbf{x}, t)$ 是正定的，且对任意的 \mathbf{x} 、 t 有 $\frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \leq 0$ ；②系统是零状态可检测的，则反馈

$$\mathbf{u} = -\mathbf{y} \quad (5.3.17)$$

使系统渐进稳定的。

此外，假设 $H(\mathbf{x}, t)$ 是递减的和系统是周期性的，反馈 (5.3.17) 使系统一致渐进稳定的。

定理 5.3.2 在定理 5.3.1 的条件下，假设①哈密顿函数 $H_d(\mathbf{x}, t)$ 是正定的；②系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H_d(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_d(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.3.18)$$

是零状态可检测的，则控制律

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = - \left[\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{c}_i(\mathbf{x})} + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_d(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (5.3.19)$$

使系统 (5.3.1) 渐进稳定。

此外，假设 $H_d(\mathbf{x}, t)$ 是递减的和系统 (5.3.18) 是周期性的，反馈 (5.3.19) 使系统 (5.3.1) 一致渐进稳定。

证明：根据定理 5.3.1，控制律 (5.3.14) 确保具有存储函数 $H_d(\mathbf{x}, t)$ 的系统 (5.3.18) 是无源的。由于 $H_d(\mathbf{x}, t)$ 是正定的和系统 (5.3.18) 是零状态可检测的，根据引理 5.3.1，控制

$$\mathbf{v} = -\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_d(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.3.20)$$

渐进稳定系统 (5.3.18)，即控制 (5.3.19) 渐进稳定系统 (5.3.1)。

3. 时变 PCHD 系统的自适应控制

考虑具有不确定参数的时变哈密顿系统

$$P(t): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.3.21)$$

式中, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \cdots \ \theta_p)^T$ 是不确定参数。

假定 5.3.1 $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = L_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^p L_i(\mathbf{x}, t) \theta_i = L_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\theta}$, $L_0(\mathbf{x}, t)$ 、 $L_i(\mathbf{x}, t)$, $i=1, 2, \dots, p$, 是平滑的函数; $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = (L_1(\mathbf{x}, t) \ \cdots \ L_p(\mathbf{x}, t))$ 。不需要 $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ 是正定的。下面通过两个步骤构造系统 (5.3.21) 的自适应控制律。

① 假设系统中所有的参数 θ_i 是已知的, 利用前面论述的能量函数成型方法和设计反馈控制律

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$$

能够稳定系统 (5.3.21)。

② 构造一个更新的控制律和在反馈控制律中用估算值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代替未知参数, 即设计控制律

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \end{cases}$$

具体步骤如下:

步骤 1 假设系统中所有的参数 θ_i 是已知的, 并作如下假定:

假定 5.3.2 假定存在向量函数 $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = [C_1(\mathbf{x}), \dots, C_{n_c}(\mathbf{x})]$ 、矩阵 $\mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t)$ 和函数 $L_0^c(\boldsymbol{\xi}, t)$, $L_i^c(\boldsymbol{\xi}, t)$, $i=1, 2, \dots, p$, 使得

$$[\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \quad (5.3.22)$$

和 $\bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \triangleq H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + H_c[\mathbf{C}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}, t] = \{L_0(\mathbf{x}, t) + L_0^c[\mathbf{C}(\mathbf{x}), t]\} + \{L(\mathbf{x}, t) + L_c[\mathbf{C}(\mathbf{x}), t]\}$ 是相对于 \mathbf{x} 的正定函数且 $\partial \bar{H} / \partial t \leq 0$, 此处, $H_c[\mathbf{C}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}, t] = L_0^c(\boldsymbol{\xi}, t) + \mathbf{L}_c(\boldsymbol{\xi}, t) \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{L}_c(\boldsymbol{\xi}, t) = (L_1^c(\boldsymbol{\xi}, t) \ \cdots \ L_p^c(\boldsymbol{\xi}, t))$, $\boldsymbol{\xi} \in R^m$ 。

则控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \quad (5.3.23)$$

稳定系统 (5.3.21)。

步骤 2 在控制律 (5.3.23) 中, 由估算值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代替未知参数 $\boldsymbol{\theta}$, 即考虑自适应

控制律为

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \end{cases} \quad (5.3.24)$$

式中, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ 是待设计的。

把式 (5.3.24) 代入式 (5.3.21), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \\ &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \\ &\quad - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} - \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \right] \\ &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial L_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

$$\text{取} \quad V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Gamma} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \quad (5.3.26)$$

作为候选 Lyapunov 函数, $\boldsymbol{\Gamma}$ 为正定矩阵。于是, $V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^T \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial^T \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \\ &\quad \times \frac{\partial L_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \\ &= \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^T \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ &\quad - (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \left[\frac{\partial^T L_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \right] \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

如果选择 $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial^T L_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}}$ 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^T \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \\ &\quad \times \left[\frac{\partial^T L_c(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}(\mathbf{x})} \mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{L}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^T \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

式中, $\bar{L}(x, t) = L(x, t) + L_c[C(x), t]$ 和 $Q(x, t) = \frac{\partial^T L_c(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=c(x)} g_c(x, t) g^T(x, t) \frac{\partial \bar{L}(x, t)}{\partial x}$ 。

假定 5.3.3 如果 $Q(x, t) + Q^T(x, t) \leq 0$, 则 $\dot{V}(x, \hat{\theta}, t) \leq 0$, 这就意味着系统 (5.3.21) ~ 系统 (5.3.24) 是稳定的。

根据上述分析及假定, 可有自适应控制器

$$\begin{cases} u = -g_c^T(x, t) \frac{\partial H_c(\xi, \hat{\theta}, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=c(x)} \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial L_c(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^T \Big|_{\xi=c(x)} g_c(x, t) g^T(x, t) \frac{\partial \bar{H}(x, \theta, t)}{\partial x} \end{cases} \quad (5.3.29)$$

稳定具有不确定参数的系统 (5.3.21)。

事实上, 闭环系统 (5.3.21) ~ 系统 (5.3.28) 可以表示成下列哈密顿系统 (为简单起见, 取 $\Gamma = I_p$):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(x, t) - R(x, t) & -P(x, t) \\ P^T(x, t) & Q(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x, \hat{\theta}, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial V(x, \hat{\theta}, t)}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (5.3.30)$$

式中, $P(x, t) = g(x, t) g_c^T(x, t) \left(\frac{\partial L_c(\xi, t)}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=c(x)}$ 。

因此, 假设 (如果 $Q(x, t) + Q^T(x, t) \leq 0$, 则 $\dot{V}(x, \hat{\theta}, t) \leq 0$) 可由假设系统 (5.3.30) 是耗散的代替, 即

$$\begin{pmatrix} R(x, t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} [Q(x, t) + Q^T(x, t)] \end{pmatrix} \geq 0$$

考虑连续时变非线性周期系统

$$\dot{x} = f(x, t) = f(x, t + \tau) \quad \forall x, t \quad (5.3.31)$$

假设 $f(x, t)$ 是完整的向量场, 对于每一个初始值 (x_0, t_0) , $t > t_0$ 唯一解存在。

此外, 存在正定函数 $V(x, t)$, $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \leq 0$ 。如果系统 (5.3.31)

所有非凡解 $\dot{V}(x, t)$ 不等于零, 则原点是渐进稳定的。用该结论, 若前面的假定 5.3.1 ~ 假定 5.3.3 成立且满足① $J(x, t)$ 、 $R(x, t)$ 、 $g(x, t)$ 和 $H_c(\xi, t)$ 都是周期为 T 的时间 t 的函数; ② $\bar{H}(x, \theta, t) = \bar{H}(x, \theta)$ 与时间无关; ③除 $(0, \theta)$ 外, 对系统 (5.3.21) ~

系统 (5.3.24) 的任意解 $\dot{V}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ 不等于零, 则系统 (5.3.21) 可由控制器 (5.3.29) 渐进稳定。

接着考虑广义的哈密顿系统

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \mathbf{u} \quad (5.3.32)$$

在系统 (5.3.32) 中, $\boldsymbol{\theta} \in R^p$ 是未知的恒定参数, 并做如下假定:

假定 5.3.4 存在函数 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \cdots \mathbf{C}_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))$ 、矩阵 $\mathbf{g}_c(\mathbf{x}, t)$ 和函数 $H_c(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\boldsymbol{\xi} \in R^m$, 使得

$$[\mathbf{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (5.3.33)$$

和 $\bar{H}(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + H_c[\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta}, t]$ 相对于 \mathbf{x} 是正定的且 $\partial H / \partial t \leq 0$ 。

假定 5.3.5 存在 $L_0^c(\mathbf{x}, t)$, $L_0(\mathbf{x}, t) \in R^m$, $m \times r$ 矩阵 $L_c(\mathbf{x}, t)$ 、 $L(\mathbf{x}, t)$ 和常数向量 $\mathbf{p} \in R^r$, 使得

$$\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial H_c(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} = L_0^c(\mathbf{x}, t) + L_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{p} \quad (5.3.34)$$

$$\mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \mathbf{x}} = L_0(\mathbf{x}, t) + L(\mathbf{x}, t) \mathbf{p} \quad (5.3.35)$$

假定 5.3.6 $L_c^T(\mathbf{x}, t) L(\mathbf{x}, t) + L^T(\mathbf{x}, t) L_c(\mathbf{x}, t) \leq 0$ 。

基于假定 5.3.4~假定 5.3.6, 系统 (5.3.32) 可有控制律

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -L_0^c(\mathbf{x}, t) - L_c(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{p}} \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}} = L_c(\mathbf{x}, t) L_0(\mathbf{x}, t) + L_c(\mathbf{x}, t) L(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{p}} \end{cases} \quad (5.3.36)$$

证明: 容易证明具有控制律 (5.3.36) 的系统 (5.3.32) 的闭环系统为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{g} L_c \\ L_c^T \mathbf{g}^T & -\frac{1}{2}(\mathbf{L}_c^T L + L^T L_c) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\mathbf{L}_c^T L + L^T L_c) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \end{pmatrix} \quad (5.3.37)$$

式中, $V(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^T (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})$ 。

根据假定 5.3.4~假定 5.3.6, 系统 (5.3.37) 是具有正定函数的耗散哈密顿系统, 则平衡点 $(0, \mathbf{p})$ 是稳定的。

例 5.3.1 考虑时变系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \sin t & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (5.3.38)$$

式中, $H = \frac{1}{2}x_1^2(1 - \sin x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2\theta}x_2^2(2x_1 - 1) + x_1$, $\theta > 0$ 是不确定参数。

选择 $c(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \theta x_1$ 和 $g_c(x_1, x_2, t) = -\theta(1 - \sin t) - x_2^2$, 可得

$$[J(\mathbf{x}, t) - R(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{g} \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t)$$

如果 H_c 选为 $H_c(\xi) = \frac{1}{\theta}\xi$, 则 $\bar{H} \triangleq H(\mathbf{x}, \theta) + H_c[c(\mathbf{x}), \theta] = \frac{1}{2}x_1^2(1 - \sin x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{\theta}x_1^2x_2^2$ 具有局部正定。此外有

$$\begin{cases} \mathbf{g}_c^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=c(\mathbf{x})} = L_0^c(\mathbf{x}, t) + L_c(\mathbf{x}, t) \mathbf{p} \\ \mathbf{g}^T \frac{\partial \bar{H}_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = L_0(\mathbf{x}, t) + L(\mathbf{x}, t) \mathbf{p} \end{cases}$$

式中, $L_0^c(\mathbf{x}, t) = -(1 - \sin t)$, $L_c(\mathbf{x}, t) = -x_2^2$, $L_0(\mathbf{x}, t) = x_1(1 - \sin x_2)$, $L(\mathbf{x}, t) = x_2^2$, $\mathbf{p} = \frac{1}{\theta}$ 。

明显看出, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_c^T \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{L}_c) = -x_2^4$ 是半负定的。于是, 得到自适应控制器

$$\begin{cases} u = 1 - \sin t + x_2^2 \hat{p} \\ \dot{\hat{p}} = -x_2^2 [x_1(1 - \sin x_2) + x_2^2 \hat{p}] \end{cases} \quad (5.3.39)$$

闭环系统的 Lyapunov 函数为

$$V = \bar{H}(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(\hat{p} - p)^2$$

于是, V 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -(1 - \sin t) \left[x_1(1 - \sin x_2) + \frac{1}{\theta}x_2^2 \right]^2 - \theta \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \cos x_2 + x_2 + \frac{1}{2\theta}x_1x_2 \right)^2 \\ & - x_2^4(\hat{p} - p)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

因此, 由于 $V(t)$ 递减和有下界, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ 存在。闭环系统的稳定性意味着闭环

系统的轨迹 $[x_1(t), x_2(t), \hat{p}(t)]$ 在 R^+ 上有界。由于系统是周期的, $[\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{\hat{p}}(t)]$ 也是有界的。于是, 由式 (5.3.40) 可知, 在 R^+ 上 \dot{V} 也是有界的, 所以, \dot{V} 在 R^+ 上是一致连续的。综上可得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{V} \rightarrow 0$, 说明控制器 (5.3.40) 是有效的。

5.3.2 非线性时变系统的 PCHD 实现

1. 非线性时变系统的 PCHD 实现的基本概念

考虑时变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (5.3.41)$$

如果存在合适的坐标变换和哈密顿函数 $H(\mathbf{x}, t)$ 可使其转化为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.3.42)$$

式中, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 为时变结构矩阵。

如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 为反对称矩阵, $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ 为对称矩阵, 则系统 (5.3.42) 为系统 (5.3.41) PCHD 实现。

考虑受控时变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad (5.3.43)$$

如果存在反馈控制律 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}$ 使系统 (5.3.43) 的闭环系统表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} \quad (5.3.44)$$

则系统 (5.3.44) 为系统 (5.3.43) 的反馈 PCHD 实现。

2. 非线性时变系统的 PCHD 实现

考虑非线性时变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad \mathbf{f}(0, t) = 0, \mathbf{u} \in R^m \quad (5.3.45)$$

对任意正则正定函数 $H(\mathbf{x})$, 系统 (5.3.45) 可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad (5.3.46)$$

$$\text{式中, } \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{\left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \mathbf{I}_n & \mathbf{x} \neq 0 \\ 0 & \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (5.3.47)$$

是对称的，且

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \left(\mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{\text{id}}^T(\mathbf{x}, t) \right) & \mathbf{x} \neq 0 \\ 0 & \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (5.3.48)$$

是反对称矩阵，并有

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{f}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (5.3.49)$$

证明：由式 (5.3.49) 可得

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}_{\text{id}}} H(\mathbf{x}) &= \left\langle \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \frac{\left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \left\langle \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \left[\mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{\text{id}}^T(\mathbf{x}, t) \right] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{\text{id}}^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) \left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2 - \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} L_{\mathbf{f}_{\text{id}}} H(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

因此，当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}_{\text{id}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned}$$

注意：即使 $\mathbf{x} = 0$ ，上述方程仍然成立，证毕。

现在把 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ 分解成 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ 和 $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ 是对称矩阵, 则 (5.3.46) 变为

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \quad (5.3.50)$$

假定 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in R^{n \times 1}$, 如果存在任意正则正定函数 $H(\mathbf{x})$ 使得 $L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)} H(\mathbf{x}) \neq 0$ ($\mathbf{x} \neq 0$) , 则系统 (5.3.45) 为具有 $H(\mathbf{x})$ 作为哈密顿函数的反馈 PCHD 实现。

当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, 选择控制律

$$\mathbf{u} = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} H(\mathbf{x})} \left(L_{\mathbf{g}} H(\mathbf{x}) \mathbf{v} - \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (5.3.51)$$

可使 (5.3.50) 变为 PCHD^[3], 即 PCHD 实现。

例 5.3.2 确定反馈控制律把时变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} t x_1 + t^2 x_1^2 x_2 \\ -t^2 x_1^3 + t x_2 \\ t x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 + t(x_1 + x_2) \\ x_2 + t(x_2 - x_1) \\ x_3 + t x_3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in R^3, t \in R^+ \quad (5.3.52)$$

表示成 PCHD 系统。

① 选择正则正定函数 $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, 根据式 (5.3.49)

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{td}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \frac{\left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} t x_1 + t^2 x_1^2 x_2 \\ -t^2 x_1^3 + t x_2 \\ t x_3 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{t x_1^2 + t x_2^2 + t x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 x_1^2 x_2 & -t^2 x_1^3 & 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

于是, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, 根据式 (5.3.47)、式 (5.3.48) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \left[\mathbf{f}_{\text{td}}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{\text{td}}^T(\mathbf{x}, t) \right] \\ &= \frac{t^2 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} 0 & x_1^2 + x_2^2 & x_2 x_3 \\ -x_1^2 - x_2^2 & 0 & -x_1 x_3 \\ -x_2 x_3 & x_1 x_3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{\left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2} \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

所以式 (5.3.52) 可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u & \mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u & \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (5.3.53)$$

② 设计控制律把系统转换成耗散的形式。因为 $L_g H(\mathbf{x}) = (1+t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \neq 0$ ($\mathbf{x} \neq 0$)，式 (5.3.53) 有哈密顿函数为 $H(\mathbf{x})$ 的反馈耗散实现。

把 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ 分解成 $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ ， $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \text{diag}(1 \ 1 \ 1) > 0$ ， $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \text{diag}(1+t \ 1+t \ 1+t) > 0$ 。当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时，根据式 (5.3.51)，选择的控制律为

$$u = \frac{1}{L_g H(\mathbf{x})} \left(L_g H(\mathbf{x})v - \frac{\partial^T H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{1}{(1+t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \\ \times \left[(1+t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)v - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = -1 + v$$

当 $\mathbf{x} = 0$ 时， $u = v$ 。基于上述控制律，式 (5.3.53) 表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \left[\begin{pmatrix} 1+t & \frac{t^2 x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)}{\varphi(x)} & \frac{t^2 x_1^2 x_2 x_3}{\varphi(x)} \\ -\frac{t^2 x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)}{\varphi(x)} & 1+t & -\frac{t^2 x_1^3 x_3}{\varphi(x)} \\ -\frac{t^2 x_1^2 x_2 x_3}{\varphi(x)} & \frac{t^2 x_1^3 x_3}{\varphi(x)} & 1+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)v & \mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)v & \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

式中， $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 。

5.4 分布参数哈密顿系统

5.4.1 狄拉克结构和 PCHD 系统^[3, 35, 36]

1. 狄拉克结构 (dirac structures)

考虑有限线性空间及其对偶 (duality) 空间。令 \mathbf{F} 为 l 维线性空间， \mathbf{F}^* 为其对

偶空间。它们的乘积空间 $F \times F^*$ 为功率变量空间，则功率定义为

$$P = \langle f^* | f \rangle \quad (f, f^*) \in F \times F^* \quad (5.4.1)$$

式中， $\langle f^* | f \rangle$ 表示对偶积，即线性函数 $f^* \in F^*$ 与 $f \in F$ 相互作用，称 F 为流 f 的空间， F^* 为力 $e = f^*$ 的空间，则将功率 $(f, e) \in F \times F^*$ 表示为 $\langle e | f \rangle$ 。

例如，电路中功率变量是电压和电流对（电流向量是流向量，电压向量为施加的力向量），机械领域中的功率变量是广义速度和力。由相应的功率定义，在功率变量空间 $F \times F^*$ 上定义双线形 \ll, \gg 为

$$\ll (f_1, e_1), (f_2, e_2) \gg \triangleq \langle f_1 | e_1 \rangle + \langle f_2 | e_2 \rangle \quad (f_1, e_1), (f_2, e_2) \in F \times F^* \quad (5.4.2)$$

定义 5.4.1 在 $F \times F^*$ 上的（恒定）狄拉克结构为一子空间 $D \subset F \times F^*$ 使得 $D = D^\perp$ ， \perp 表示关于无限双线形 \ll, \gg 的正交补。

对所有的 $(f, e) \in D$ 有 $\langle e | f \rangle = 0$ ，任意狄拉克结构是功率守恒的。此外，如果 F 是有限维的，则任意狄拉克结构 $D \subset F \times F^*$ 满足 $\dim D = \dim F$ 。

在有限维线性空间上的狄拉克结构有不同的表示方法。在此，叙述一类后面要用到的狄拉克结构表示方法。采用核表示法的表示的每一个狄拉克结构 D 为

$$D = \{(f, e) \in F \times F^* | Gf + Ee = 0\} \quad (5.4.3)$$

对于线性映射 $G: F \rightarrow h$ 和 $E: F^* \rightarrow h$ 满足：

$$\begin{cases} EG^* + GE^* = 0 \\ \text{rank } G + E = \dim F \end{cases} \quad (5.4.4)$$

式中， h 为与 F 相同维数的线性空间， $G^*: h^* \rightarrow F^*$ 和 $E^*: h^* \rightarrow F^{**} = F$ 分别是 G 和 E 的伴随映射。

狄拉克结构 D 用像表示法也可写成

$$D = \{(f, e) \in F \times F^* | f = E^* \lambda, e = G^* \lambda, \lambda \in h^*\} \quad (5.4.5)$$

有时，通过允许线性空间 h 的维数大于线性空间 F 的维数，放松对 G 和 E 选择是有益的。在此情况下，狄拉克结构表示法为放松的核和像表示法。

对 F 、 F^* 及 h 选择线性坐标可获得矩阵核和像表示法。事实上，对 F 取任意基 f_1, \dots, f_n 和对 F^* 取对偶基 $e_1 = f_1^*, \dots, e_n = f_n^*$ ， $\dim F = n$ 。此外，对 h 取任意线性坐标集。于是，线性映射 G 和 E 由满足 $EG^T + GE^T = 0$ 、 $\text{rank}(G|E) = \dim F$ 的 $n \times n$ 矩阵 G 和 E 表示。在此情况下，放松的核和像表示将是 $n' \times n (n' > n)$ 矩阵。

2. PCHD 系统的狄拉克结构

(1) 集中参数系统

对集中参数系统, 要定义狄拉克结构 \mathbf{D} 的表示, 考虑有限维流 \mathbf{f} 的线性空间 \mathbf{F} 和它的对偶空间 \mathbf{F}^* , 即 \mathbf{e} 的线性空间。于是, 功率定义为 $P = \langle \mathbf{e} | \mathbf{f} \rangle$ 。对于 PCH 系统, 以输入/输出形式表示的狄拉克结构 \mathbf{D} 为

$$\mathbf{D} \triangleq \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathbf{F} \times \mathbf{F}^* \mid \mathbf{e}_p = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_R = \mathbf{g}_R^T(\mathbf{x})\mathbf{e}_s, \mathbf{f}_s = -\mathfrak{J}(\mathbf{x})\mathbf{e}_s - \mathbf{g}_R(\mathbf{x})\mathbf{f}_R - \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{f}_p \right\} \quad (5.4.6)$$

式中, $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) := (\mathbf{f}_s, \mathbf{f}_R, \mathbf{f}_p, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_p)$, \mathbf{f}_s 、 \mathbf{f}_R 及 \mathbf{f}_p 分别是存储、耗散及外部流; $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $\mathfrak{J}(\mathbf{x}) = -\mathfrak{J}^T(\mathbf{x})$ 为互联矩阵; $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}_s(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}_R(\mathbf{x})$ 是适当维数的输入矩阵。

根据式 (5.4.6), 容易证明 $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathbf{D} = \mathbf{D}^\perp$, 即

$$\langle (\mathbf{f}, \mathbf{e}), (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \rangle = 2 \langle \mathbf{e} | \mathbf{f} \rangle = \mathbf{e}_s^T \mathbf{f}_s + \mathbf{e}_R^T \mathbf{f}_R + \mathbf{e}_p^T \mathbf{f}_p = 0 \quad (5.4.7)$$

则对 \mathbf{D} 中的所有的量 $P = 0$, 狄拉克结构定义了力和流变量间的功率守恒。

假设耗散元件的力和流变量之间的关系为 $\mathbf{f}_R = -\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{e}_R$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \geq 0$, 可获得 PCHD 系统功率变量之间的关系为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{e}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{J}(\mathbf{x}) + \mathfrak{H}(\mathbf{x}) & -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{f}_p \end{pmatrix} \quad (5.4.8)$$

式中, $\mathfrak{H}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}_R^T(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{g}_R(\mathbf{x})$ 。

由上述可知, 这些功率变量表示了 PCHD 系统。为恢复 PCHD 系统的古典能量变量-状态空间描述, 哈密顿函数 $H(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 由保守元件存储的能量表示, 则能量的

增加等于功率, 即 $P(t) = \frac{dH(\mathbf{x}(t))}{dt} = \left\langle \frac{\partial H(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mid \dot{\mathbf{x}}(t) \right\rangle$, 于是, 能量存储元件的流和力

变量由 $\mathbf{f}_s = -\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{e}_s = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 给出。以这种方式可得众所周知的 PCHD 系统模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathfrak{J}(\mathbf{x}) - \mathfrak{H}(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{f}_p \\ \mathbf{e}_p = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.4.9)$$

很清楚, 式 (5.4.9) 满足能量平衡

$$\dot{H}[\mathbf{x}(t)] = -\frac{\partial H^T[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}} \mathfrak{H}[\mathbf{x}(t)] \frac{\partial H[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{e}_p^T(t)\mathbf{f}_p(t)$$

下面，为联系标准的输入/输出表示，将用 $\mathbf{e}_p = \mathbf{y}_p$ 和 $\mathbf{f}_p = \mathbf{u}_p$ 。

(2) 分布参数系统

为定义分布参数系统的狄拉克结构，不采用集中参数有限维线性空间 $\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*$ ，为适于多维空间域的更一般的微分几何环境，必须考虑无限维函数空间。

函数空间 $\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*$ 定义如下：

考虑函数空间 $\boldsymbol{\varepsilon} \triangleq \mathbf{H}_{1M}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{H}_{1E}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{B}$ ， $\mathbf{H}_{1M}(\mathbf{Z})$ 、 $\mathbf{H}_{1E}(\mathbf{Z})$ 分别表示磁力 \mathbf{e}_M 、电力 \mathbf{e}_E 的空间， \mathbf{B} 表示在边界 \mathbf{Z} 处的外力 \mathbf{e}_b 。这里 $\mathbf{H}_1(\mathbf{Z})$ 代表 \mathbf{Z} 上 L_2 函数索伯列夫空间，其导数也在 L_2 中。而 \mathbf{F} 定义为相关于对偶积（再次定义为功率 P ） $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的对偶空间。

$$\langle (\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M, \mathbf{e}_b), (\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_M, \mathbf{f}_b) \rangle = \int_0^l [\mathbf{f}_E(z) \mathbf{e}_E(z) + \mathbf{f}_M(z) \mathbf{e}_M(z)] dz + \mathbf{e}_b \mathbf{f}_b \Big|_0^l \quad (5.4.10)$$

式中， $(\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_M, \mathbf{f}_b)$ 分别代表电流、磁流（二者为隶属于对偶索伯列夫空间 $\mathbf{H}_1(\mathbf{Z}^*)$ \mathbf{Z} 上的函数）及边界流。类似于式（5.4.2），能够定义 $\mathbf{F} \times \boldsymbol{\varepsilon}$ 的两个元素间双线形为

$$\ll (\mathbf{f}^1, \mathbf{e}^1), (\mathbf{f}^2, \mathbf{e}^2) \gg \triangleq \int_0^l (\mathbf{e}_E^1 \mathbf{f}_E^2 + \mathbf{e}_E^2 \mathbf{f}_E^1 + \mathbf{e}_M^1 \mathbf{f}_M^2 + \mathbf{e}_M^2 \mathbf{f}_M^1) dz + (\mathbf{e}_b^1 \mathbf{f}_b^2 + \mathbf{e}_b^2 \mathbf{f}_b^1) \Big|_0^l \quad (5.4.11)$$

此处，定义了 $(\mathbf{f}^i, \mathbf{e}^i) \triangleq (\mathbf{f}_E^i, \mathbf{f}_M^i, \mathbf{f}_b^i, \mathbf{e}_E^i, \mathbf{e}_M^i, \mathbf{e}_b^i) \in \mathbf{F} \times \boldsymbol{\varepsilon}, i=1, 2$ 。

下面的命题定义了具有标量空间变量的无限维系统的狄拉克结构。

命题 5.4.1 定义 $\mathbf{F} \times \boldsymbol{\varepsilon}$ 的子空间

$$\mathbf{D} \triangleq \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathbf{F} \times \boldsymbol{\varepsilon} \left| \begin{pmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_E \\ \mathbf{e}_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{e}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{Eb} \\ \mathbf{e}_{Mb} \end{pmatrix} \right\} \quad (5.4.12)$$

则 \mathbf{D} 为关于双线形（5.4.11）的恒定狄拉克结构。

下面要证明（类似于有限维情况）命题 5.4.1 狄拉克结构的元素满足广义功率守恒的形式。事实上，根据式（5.4.11），对全部的 $\langle \mathbf{f} | \mathbf{e} \rangle \in \mathbf{D}$ 可得

$$\ll (\mathbf{f}, \mathbf{e}), (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \gg = 0, \text{ 即 } 2 \int_0^l (\mathbf{e}_E \mathbf{f}_E + \mathbf{e}_M \mathbf{f}_M) dz + 2 \mathbf{e}_b \mathbf{f}_b \Big|_0^l = 0, \text{ 于是可得能量平衡性能}$$

$\int_0^l (\mathbf{e}_E \mathbf{f}_E + \mathbf{e}_M \mathbf{f}_M) dz = \mathbf{e}_b(0) \mathbf{f}_b(0) - \mathbf{e}_b(l) \mathbf{f}_b(l)$ ，该能量平衡表明了，在域 \mathbf{Z} 内的总功率等于进入边界 0 的功率减去出边界 l 的功率。

功率变量的分布参数 PCHD 系统直接遵循狄拉克结构。在边界点 $\{0, l\}$ 评估式（5.4.12）可得

$$\mathbf{f}_0 = -\mathbf{e}_{M0}, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{E0}, \mathbf{f}_l = -\mathbf{e}_{Ml}, \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_{El} \quad (5.4.13)$$

为了以能量变量写式 (5.4.12)，考虑哈密顿密度 $\mathcal{H} : \mathbf{H}_{\text{IM}}^* \times \mathbf{H}_{\text{IE}}^* \times \mathbf{Z} \rightarrow L_1$ ，总能量函数为 $H = \int_0^l \mathcal{H}(\bar{q}) \mathrm{d}z$ ， $\bar{q} \triangleq (q_{\text{E}} \quad q_{\text{M}} \quad z)$ 。假设 H 对时间是可微的，即

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \int_0^l \left(\delta_{\text{M}}^{\text{T}} H \quad \delta_{\text{E}}^{\text{T}} H \right)^{\text{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_{\text{M}}}{\partial t} \\ \frac{\partial q_{\text{E}}}{\partial t} \end{pmatrix} \mathrm{d}z$$

此处，引入了 $\delta_{\text{E}} H = \frac{\delta H}{\delta_{q_{\text{E}}}}$ 表示变化导数。

如同集中参数情况，功率和能量变量由 $\mathbf{f}_{\text{E}} = -\frac{\partial q_{\text{E}}}{\partial t}$ 、 $\mathbf{f}_{\text{M}} = -\frac{\partial q_{\text{M}}}{\partial t}$ 、 $\mathbf{e}_{\text{E}} = \delta_{\text{E}} H$ 进行联系，则以能量变量的分布参数 PCHD 系统 (5.4.12) 可写成

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_{\text{E}}}{\partial t} \\ \frac{\partial q_{\text{M}}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\text{E}} H \\ \delta_{\text{M}} H \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}_{\text{b}} = -\delta_{\text{M}} H|_{\text{b}}, \mathbf{e}_{\text{b}} = \delta_{\text{E}} H|_{\text{b}} \end{cases} \quad (5.4.14)$$

式 (5.4.14) 满足能量平衡方程 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \delta_{\text{E}}^{\text{T}} H(0) \delta_{\text{M}} H(0) - \delta_{\text{E}}^{\text{T}} H(l) \delta_{\text{M}} H(l)$ 。

例 5.4.1 对于著名的电报方程描述的传输线 PCHD 模型，狄拉克框架模型如下：能量变量为电荷 $q_{\text{E}}(t) = q(z, t)$ 和磁通 $q_{\text{M}}(t) = \lambda(z, t)$ 。总能量函数变为

$$H = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{q^2(z, t)}{C_{\text{zl}}(z)} + \frac{\lambda^2(z, t)}{L_{\text{zl}}(z)} \right] \mathrm{d}z$$

于是电报方程可表示成形式 (5.4.14) 的分布参数 PCHD 系统

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\partial q(z, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q(z, t)}{C_{\text{zl}}(z)} \\ \frac{\lambda(z, t)}{L_{\text{zl}}(z)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}_{\text{b}} = -\frac{\lambda(z, t)}{L_{\text{zl}}(z)} \Big|_0^l, \mathbf{e}_{\text{b}} = \frac{q(z, t)}{C_{\text{zl}}(z)} \Big|_0^l \end{cases} \quad (5.4.15)$$

式 (5.4.15) 中的第二个关系式定义了边界点 $\{0, l\}$ 的电压和电流。接着假设传输线的物理参数在 $[0, l]$ 中有上下界，即 $L_{\text{m}} \leq \frac{1}{L_{\text{zl}}(z)} \leq L_{\text{M}}$ ， $C_{\text{m}} \leq \frac{1}{C_{\text{zl}}(z)} \leq C_{\text{M}}$ ，

$$L_i(C_i) > 0 (i = M, m)。$$

5.4.2 哈密顿系统的互联控制^[37~40]

1. 有限维情况下的互联控制

下面首先简短回顾集中参数系统“互联控制”的 PBC 设计方法，然后再扩展到无限维系统。这种方法（允许取得能量成型目的）中的关键步骤是得到卡什米尔函数。

在“互联控制”方法中，考虑由式（5.4.9）描述的系统与 PCHD 控制器互联，控制器的状态 $x_c \in \mathbf{R}^m$ ，输入 u_c ，输出 y_c ，能量函数为 $H_c(x_c)$ 。用功率变量把 PCH 控制器描述为

$$\begin{pmatrix} f_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_c \\ u_c \end{pmatrix} \quad (5.4.16)$$

互联约束为功率守恒的形式

$$u_c = y_p, u_p = -y_c \quad (5.4.17)$$

很清楚，组合系统仍是哈密顿系统，以功率变量可写成

$$\begin{pmatrix} f_s \\ f_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}(x) + \mathcal{H}(x) & -g(x) \\ g^T(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_s \\ e_c \end{pmatrix} \quad (5.4.18)$$

其闭环能量函数（在扩展状态空间 $\mathbf{X} \triangleq (x \ x_c)^T$ 中定义） $H_{cl}(\mathbf{X}) \triangleq H(x) + H_c(x_c)$ 。

由 $\frac{dH_{cl}(\mathbf{X})}{dt} = -\frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \mathcal{H}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \leq 0$ 可知，能量函数是非增加的；希望对 $H_{cl}(\mathbf{X})$ 进行成型，在期望点分配给最小值。然而，尽管 $H_c(x_c)$ 可自由配置， $H(x)$ 是给定的，则如何有效成型 $H_{cl}(\mathbf{X})$ 不清楚。一种可能性是把闭环系统的运动限制在 \mathbf{X} 的某一子空间，如 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+m}$ （ Ω 为不变集）。以这种方式，能把闭环系统的能量函数表示仅为 x 的函数。在能量-卡什米尔方法中，寻找不依赖于哈密顿函数的动态不变集。更精确地说，是寻找称为卡什米尔函数 $C(\mathbf{X})$ ，沿着 PCHD 系统 $\frac{dC(\mathbf{X})}{dt}$ ，不依赖于能量函数。不失一般性地，考虑卡什米尔函数形为 $C(\mathbf{X}) = F(x) - x_c$ 。由于想要把这些函数沿着闭环系统（5.4.18）的轨迹保持恒定，而不顾及 $H_{cl}(\mathbf{X})$ 的精确形式，这些函数将为下列偏微分方程的解：

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^T F(x)}{\partial x} \\ -I_m \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} \mathcal{J}(x) - \mathcal{H}(x) & -g(x) \\ g^T(x) & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.4.19)$$

很清楚，水平集 $\Omega \triangleq \{ \mathbf{X} | x_c = F(x) + k \}$ （ k 为常数，不失一般性地， k 可设为 0）对闭环系统是不变集，于是定义在限定状态空间 $\mathbf{X}_r \triangleq \mathbf{X} |_{\Omega}$ 的闭环总能量函数变为 $H_d(\mathbf{X}_r) \triangleq H(x) + H_c[F(x)]$ 。 $H_d(\mathbf{X}_r)$ 可通过选择适当的 $H_c(x_c)$ 进行成型。

下面接着要做将卡什米尔合理的扩张到参数分布情况下的观察。根据 PCHD 系统（5.4.18）描述的功率变量，可以看出卡什米尔函数由子空间 $\{ \mathbf{e} \in \mathbf{F}^* | \langle 0, \mathbf{e} \rangle \in D \} \subset \mathbf{F}^*$ 。事实上，仅当况且仅当

$$\left(0, \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right) \in D \quad (5.4.20)$$

时， $C(x, x_c)$ 是卡什米尔函数。

例 5.4.2 RLC 电路互联控制。要说明互联控制方法，首先考虑由下列方程描述的 RLC 电路：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{C} \\ \frac{x_2}{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_p \\ y_p = \frac{x_2}{L} \end{cases} \quad (5.4.21)$$

式中， x_1 为电容中的电荷， x_2 为电感器中的磁链，以功率守恒将式（5.4.17）与 PCHD 控制器（5.4.16）互联。控制的目的是在平衡点 $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{x_1^*}{C} & 0 \end{pmatrix}^T$ 处稳定式（5.4.21）。容易证实满足式（5.4.19）的函数由 $C(\mathbf{X}) = x_1 - x_c$ 给出，所以在不变集 $\Omega \triangleq \{ \mathbf{X} | x_c = x_1 \}$ 闭环能量函数由 $H_d(\mathbf{X}_r) = H(x) - H_c(x_1)$ 给出。

“互联控制”方法的下一步是在限定的状态空间 $\mathbf{X}_r = (x_1 \ x_2)^T$ 内对闭环能量函数进行成型，在 \mathbf{x}^* 处能量具有最小值；因而，需要 $\frac{\partial H_d(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} = 0$ ， $\frac{\partial^2 H_d(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2} \geq 0$ 。选择 $H_c(x_c) = \frac{1}{2C_c} \tilde{x}_c^2 - \frac{x_1^*}{C} \tilde{x}_c$ ， $C_c > 0$ 和 $\tilde{x}_c = x_c - x_c^*$ ； $H_d(\mathbf{X}_r)$ 在 \mathbf{x}^* 处具有最小值。最终，PCHD 控制器由下列方程给出：

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \frac{x_2}{L} \\ y_c = \frac{1}{C} x_c - \frac{C + C_c}{CC_c} x_1^* \end{cases} \quad (5.4.22)$$

2. 有限和无限维混合情况下的互联控制

在这种情况下, 考虑通过无限维描述的系统将 PCHD 装置与 PCHD 控制器互联。为互联控制清楚, 采用以功率变量的 PCHD 模型 (5.4.8)、(5.4.16) 和 (5.4.12)。互联约束的形式为

$$y_c = f_0, u_c = e_0, y_p = e_l, u_p = -f_l \quad (5.4.23)$$

这种互联约束是功率守恒的, 在某种意义上, 如果 $l=0$, 式 (5.4.23) 在装置和控制器之间变成了功率守恒互联。为获得闭环系统动态方程, 把互联约束 (5.4.23) 代入式 (5.4.8)、式 (5.4.16) 和式 (5.4.12), 得到

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f_s \\ f_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}(x) + \mathcal{H}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_s \\ e_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(x)e_{Ml} \\ e_{E0} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_E \\ f_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_E \\ e_M \end{pmatrix} \\ \begin{cases} e_{El} = g^T(x)e_s \\ e_{M0} = -e_c \end{cases} \end{cases} \quad (5.4.24)$$

式中采用了式 (5.4.13)。

在扩展空间 $\mathbf{X} = (x \quad x_c \quad q_E(z, t) \quad q_M(z, t))^T$ 定义的能量函数为 $H_{cl}(\mathbf{X}) \triangleq H(x) + H_c(x_c) + \mathcal{H}(\bar{q})$, 能量速率为 $\dot{H}_{cl}(\mathbf{X}) = -\frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \mathcal{H}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}$ 。

(1) 卡什米尔函数

下面寻求系统动态的卡什米尔函数。为此, 将采用式 (5.4.20) 定义的卡什米尔函数。所以, 假设

$$\begin{cases} \left((\mathcal{F}(x) + \mathcal{H}(x)) \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x} + g(x) \delta_M C(\mathbf{X}) \right) \Big|_l = 0 \\ -\delta_E C(\mathbf{X}) \Big|_0 = 0 \\ \delta_M C(\mathbf{X}) = 0, \delta_E C(\mathbf{X}) = 0 \\ \delta_E C(\mathbf{X}) \Big|_l = g^T(x) \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x}, \delta_M C(\mathbf{X}) \Big|_0 = -\frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x_c} \end{cases} \quad (5.4.25)$$

成立, 函数 $C(\mathbf{X})$ 将为卡什米尔函数。

根据式 (5.4.25) 中的第三关系式和第四关系式, 可以推出式 (5.4.24) 中的每一个卡什米尔函数关于空间变量是线性的, 即

$$\begin{cases} \delta_M C(\mathbf{X}) = \text{constant} \\ \delta_E C(\mathbf{X}) = \text{constant} \end{cases} \quad (5.4.26)$$

为 z 的函数。于是有

$$\begin{cases} \delta_M C(\mathbf{X}) = \delta_M C(\mathbf{X})|_0 = \delta_M C(\mathbf{X})|_l = -\frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x_c} \\ \delta_E C(\mathbf{X}) = \delta_E C(\mathbf{X})|_0 = \delta_E C(\mathbf{X})|_l = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x} \end{cases} \quad (5.4.27)$$

将式 (5.4.27) 代入式 (5.4.25), 并考虑式 (5.4.26), 条件 (5.4.25) 简化为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) & -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x} \\ \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x_c} \end{pmatrix} = 0 \\ \delta_E C(\mathbf{X}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x}, \delta_M C(\mathbf{X}) = -\frac{\partial C(\mathbf{X})}{\partial x_c} \end{cases}$$

根据“互联控制”的观点, 关注的是与互联系统状态变量相关的卡什米尔函数, 因此, 类似于有限维的情况, 可定义不变集 Ω 。特别地, 考虑卡什米尔函数形式为

$$C(\mathbf{X}) = -x_c + F(x) + \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)] \quad (5.4.28)$$

这就意味着寻找满足下列条件的函数:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x} = 0, \frac{\partial^T F(\mathbf{x})}{\partial x} \mathcal{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \quad (5.4.29)$$

和

$$\delta_E \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)] = 0, \delta_M \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)] = 1 \quad (5.4.30)$$

命题 5.4.2 当且仅当 $F(x)$ 满足式 (5.4.29) 且如果 $y_p = e_l$ 或

$$\delta_E \mathcal{F}(\bar{q}(z, t)) = 1, \delta_M \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)] = 0 (\text{如果 } y_p = f_l) \quad (5.4.31)$$

时 $\mathcal{F}[\bar{q}(z, t)]$ 满足式 (5.4.26) 和式 (5.4.30), 则 $-x_c + F(x) + \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)]$ 是卡什米尔函数。

因此, 定义 \mathbf{X}_r 为限制在不变集 $\Omega \triangleq \{\mathbf{X} | x_c = F(x) + \mathcal{F}[\bar{q}(z, t)]\}$ 内的状态空间。

(2) 控制器设计

在分布参数系统稳定性后的问题与集中参数系统相同, 即确定相应于总能量严格极值点的平衡解, 因为相对于一个范数的稳定性并不意味着对其他范数具有稳定性, 所以对分布参数系统必须特别注意与稳定性相关的范数。在集中和分布参数系统混合的情况下, 要定义 Lyapunov 意义下的稳定性如下:

定义 5.4.2 如果对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得对所有 $t > 0$ 有 $\|\mathbf{X}_r(0) - \mathbf{X}_r^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}_r - \mathbf{X}_r^*\| < \varepsilon$ ($\mathbf{X}_r(0)$ 是 \mathbf{X}_r 的初始条件)，则集中和分布参数混合系统的平衡点 \mathbf{X}_r^* 是关于范数 $\|\cdot\|$ 在 Lyapunov 意义下稳定的。

表明稳定性的数学步骤总结如下（详见参考文献[41]）：把选取的闭环 Lyapunov 能量函数限制在 Ω ，表明能量函数在 \mathbf{X}_r^* 处有极值，并给出确保在 \mathbf{X}_r^* 处有极小值的条件，最后利用无限维 La Salle 定理证明渐进稳定性。

例 5.4.3 与传输线相连的 RLC 电路。为说明有限和无限维系统混合互联控制，把传输线嵌入控制器和 RLC 电路中间，如图 5.4.1 所示。

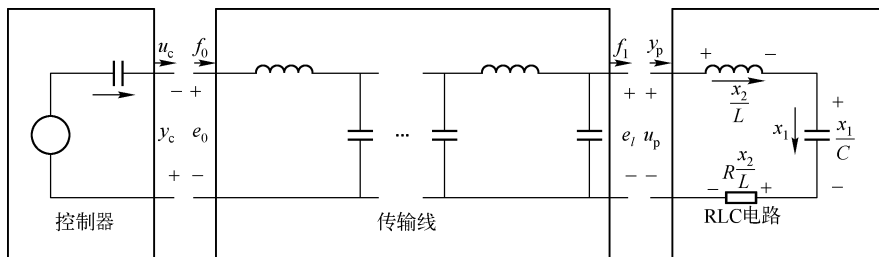


图 5.4.1 互联约束

控制目标把 RLC 电路稳定在平衡点 $\mathbf{x}^* = \left(\frac{x_1^*}{C} \ 0 \right)^T$ 。在这种情况下，功率守恒

互联约束为

$$y_c = -e_0, u_c = f_0, y_p = f_1, u_p = -e_l \quad (5.4.32)$$

RLC 电路由式 (5.4.21) 描述，控制器由式 (5.4.16) 描述，传输线由式 (5.4.12) 表示，则在互联约束 (5.4.32) 条件下，以功率变量描述的互联动态方程为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f_s \\ f_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_s \\ e_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x})e_{El} \\ -e_{M0} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_E \\ f_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_E \\ e_M \end{pmatrix} \\ \begin{cases} e_{Ml} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})e_s \\ e_{E0} = -e_c \end{cases} \end{cases} \quad (5.4.33)$$

根据命题 5.4.2，可得式 (5.4.33) 的卡什米尔函数 $C(\mathbf{X}) = -x_c + x_1 + \int_0^l q(z, t) dz$ 。于是，在不变集 $\Omega \triangleq \left\{ \mathbf{X} \mid x_c = x_1 + \int_0^l q(z, t) dz \right\}$ 内闭环系统能量函数等于

$$H_{cl}(X_r) = \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{L} + H_c \left[x_1 + \int_0^l q(z, t) dz \right] + \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{q^2(z, t)}{C_{zl}(z)} + \frac{\lambda^2(z, t)}{L_{zl}(z)} \right] dz$$

所以, 按照参考文献[41]中的步骤, 能建立下一个结果:

命题 5.4.3 考虑由式 (5.4.21) 定义的 RLC 电路, 模型为 (5.4.15) 的传输线, 在 (5.4.32) 互联约束下 PCH 控制器由下式定义:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\frac{\lambda(0, t)}{L_{zl}(0)} \\ y_c = \frac{1}{C_c} x_c - \frac{C + C_c}{C_c C} x_1^* - \frac{x_1^*}{C_c C} \int_0^l C_{zl}(z) dz \end{cases} \quad (5.4.34)$$

合成互联系统关于范数 $\|X_r\| = \left[\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \int_0^l \Delta q^2(z, t) dz + \int_0^l \Delta \lambda^2(z, t) dz + \right]^{\frac{1}{2}}$ 在点

$$\begin{cases} X_r^* = \begin{pmatrix} \frac{x_1^*}{C} & 0 & \frac{x_1^*}{C} C_{zl}(z) & 0 \end{pmatrix}^T \\ X_r = [x \quad \bar{q}(z, t)]^T \end{cases}$$

具有 Lyapunov 意义下的稳定。

比较集中参数 PCHD 控制器 (5.4.22) 和式 (5.4.34) 定义的控制器的, 可以看出, 传输线的影响由式 (5.4.34) 中 x_c 的混合性质补偿。

5.5 切换耗散哈密顿系统

切换系统是非线性控制中的研究热点之一, 倍受人们的关注。一方面, 切换是自然界及人类行为的典型形式; 另一方面, 切换系统是复杂性科学的重要组成部分, 具有很强的挑战性。由于切换系统本身的复杂性, 人们对切换系统的认识还只是初步的, 仍有许多课题有待于探索研究。广义哈密顿系统作为一类广泛的非线性动态系统, 其切换 (混合) 形式具有重要的代表性。切换 (混合) 哈密顿系统是一类全新的混合系统, 属当今非线性控制科学的一个前沿方向^[42], 对切换 (混合) 哈密顿系统的研究具有重要的科学价值和很好的应用前景。到目前为止, 有关切换 (混合) 哈密顿系统研究结果还不多见^[43]。相信, 对切换 (混合) 哈密顿系统的研究将成为今后研究的热点之一。

5.5.1 切换耗散哈密顿系统及其稳定性^[42~44]

本节研究切换耗散哈密顿系统在任意切换路径下的稳定性。在合理的假设下,

切换耗散哈密顿系统的所有子模型的哈密顿函数可用作多重 Lyapunov 函数。然后, 利用耗散哈密顿系统的结构特性, 给出在任意切换路径下的切换耗散哈密顿系统渐近稳定的两个充分条件。

1. 切换耗散哈密顿系统方程

考虑如下切换耗散哈密顿系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = [\mathcal{J}_{\lambda(t)}(x) - \mathcal{R}_{\lambda(t)}(x)] \frac{\partial H_{\lambda(t)}(x)}{\partial x} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.5.1)$$

式中, $x \in R^n$ 是系统的状态; $\mathcal{J}_{\lambda(t)}(x) = -\mathcal{J}_{\lambda(t)}^T(x) \in R^{n \times n}$, $0 \leq \mathcal{R}_{\lambda(t)}(x) \in R^{n \times n}$; $H_{\lambda(t)}(x)$ 是子系统的哈密顿函数, 且满足 $H_{\lambda(t)}(x) > 0$, $0 \neq x \in R^n$, $H_{\lambda(t)}(0) = 0$; 映射 $\lambda(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \Lambda = \{1, 2, \dots, N\}$ 是分段常值函数, 称为切换律或切换路径, 并且 $\lambda(t) = i (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示第 i 个子系统起作用。

对于切换路径 $\lambda(t) = i_m \in \Lambda (t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, 2, \dots)$ 而言, $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 为其切换时间序列, 并满足 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots < +\infty$ 。

当 $t \geq t_m$ 时, $t_{m+1} \rightarrow +\infty$, 系统 (5.5.1) 的第 i_m 个子系统总是在起作用。在这种情况下, 系统 (5.5.1) 就成为一个非切换的正常耗散哈密顿系统, 所以整个系统自然稳定。

2. 切换耗散哈密顿系统的稳定性

为研究系统 (5.5.1) 的稳定性, 给出如下假设:

假设 5.5.1 对 $\forall i \in \Lambda$ 和 $\forall x, y \in R^n$, 哈密顿函数 $H_i(x)$ 满足: $H_i(x) > H_i(y) \Leftrightarrow \|x\|_P > \|y\|_P$, 其中 $\|x\|_P \triangleq \sup_{\|x\|=0} x^T P x$, $P > 0$ 为一正定矩阵。要求 $H_i(x)$ 的函数值随

x 的 P 范数增加而增加。

定理 5.5.1 若假设 5.5.1 成立, 则系统 (5.5.1) 在任意切换路径 $\lambda(t)$ 下稳定。

证明: 设 $\lambda(t)$ 是任意切换路径, 当 $\lambda(t) = i_m \in \Lambda$ 时, 因为第 i_m 个子模型是一个耗散哈密顿系统, 所以有

$$\dot{H}_{i_m}(x_m) = -\frac{\partial H_{i_m}^T(x(t))}{\partial x} \mathcal{R}_{i_m}[x(t)] \frac{\partial H_{i_m}(x(t))}{\partial x} \leq 0, t \in [t_m, t_{m+1})$$

由此可得

$$H_{i_m}(x_m) \geq H_{i_m}(x_{m+1}) \quad (5.5.2)$$

由式 (5.5.2) 和假设 5.5.1, 得

$$\|x_m\|_P \geq \|x_{m+1}\|_P \quad (5.5.3)$$

注意到, 式 (5.5.3) 对 $m=0,1,2,\dots$ 均成立。再由假设 5.5.1 可知, 对 $\forall i \in A$ 有

$$H_{i_m}(x_m) \geq H_{i_m}(x_{m+1}), m=0,1,2,\dots \quad (5.5.4)$$

由式 (5.5.4) 可知, 所有子模型的 Hamilton 函数 $H_i(x)$ 构成系统 (5.5.1) 的多重 Lyapunov 函数 (MLF)。由参考文献[45]可知, 系统 (5.5.1) 稳定。

从上述证明过程可知, 在假设 5.5.1 下, 系统 (5.5.1) 的所有子模型的哈密顿函数构成系统的多重 Lyapunov 函数 (MLF)。

下面利用哈密顿系统的结构特性进一步来研究切换系统 (5.5.1) 的渐近稳定性。

首先, 考虑系统 (5.5.1) 中所有 $\mathcal{H}_i(x) > 0 (i \in A)$ 都是正定矩阵的情形。该情形在哈密顿系统的研究中是一类非常重要的情形。当 $\mathcal{H}_i > 0$ 时, 可得到如下渐近稳定的结果:

定理 5.5.2 在假设 5.5.1 下, 若 $\mathcal{H}_i(x) > 0, \forall i \in A$ 则系统 (5.5.1) 对于驻留时间 (dwell time) 大于零的任意切换路径 $\lambda(t)$ 都是全局渐近稳定的。

证明: 设 $\lambda(t)$ 是驻留时间 $\tau > 0$ 的任意切换路径。令 $H[x(t)]$ 表示整个切换系统的总能量, 则

$$H[x(t)] = H_{i_m}[x(t)], t \in [t_m, t_{m+1}), i_m \in A, m=0,1,2,\dots \quad (5.5.5)$$

由于 $\mathcal{H}_{i_m} > 0$, 根据式 (5.5.1) 得

$$\dot{H}[x(t)] = -\frac{\partial H_{i_m}^T[x(t)]}{\partial x} \mathcal{H}_{i_m}[x(t)] \frac{\partial H_{i_m}[x(t)]}{\partial x} < 0, t \in [t_m, t_{m+1}), i_m \in A, m=0,1,2,\dots \quad (5.5.6)$$

由式 (5.5.6) 可得

$$H_{i_m}(x_m) \geq H_{i_m}(x(t)) > H_{i_m}(x_{m+1}), t \in [t_m, t_{m+1}), i_m \in A, m=0,1,2,\dots \quad (5.5.7)$$

根据假设 5.5.1 和式 (5.5.7) 可得

$$\|x_m\|_P \geq \|x(t)\|_P > \|x_{m+1}\|_P, t \in [t_m, t_{m+1}), m=0,1,2,\dots \quad (5.5.8)$$

即

$$\|x_m\|_P > \|x_{m+1}\|_P, m=0,1,2,\dots \quad (5.5.9)$$

从而, 对 $\forall i \in A$, 再由假设 5.5.1 和式 (5.5.9), 可知

$$H_i(x_m) > H_i(x_{m+1}), m=0,1,2,\dots \quad (5.5.10)$$

由式 (5.5.9) 和式 (5.5.10) 可知, 切换状态的 P 范数序列 $\{\|x_m\|_P\}_{m=0}^{+\infty}$ 和切换能量序列 $\{H_i(x_m)\}_{m=0}^{+\infty} (i \in A)$ 都是严格单调递减且有零下界的序列。由此, 可证明^[27] 下列结论成立:

$$\|x_m\|_p \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \quad (5.5.11)$$

定理 5.5.3 在假设 5.5.1 下, 若存在某个矩阵 $\mathcal{H}_l(x) > 0, l \in A$, 而其他 $\mathcal{H}_i(x) \geq 0, \forall i \neq l \in A$, 则系统 (5.5.1) 对于驻留时间大于零的任意切换路径 $\lambda(t)$ 都是全局渐近稳定的 (证明详见参考文献[44])。

例 5.5.1 考虑下面的切换耗散哈密顿系统

$$\begin{cases} \dot{x} = [\mathcal{F}_i(x) - \mathcal{H}_i(x)] \frac{\partial H_i(x)}{\partial x} \\ x(t_0) = x_0, i = 1, 2 \end{cases} \quad (5.5.12)$$

其中, $\mathcal{F}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 4 - x_2^2 \\ x_2^2 - 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}_1(x) = \begin{pmatrix} 0.1 \sin^2 x_1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \cos^2 x_2 + 0.5 \end{pmatrix}$, $H_1(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2$; $\mathcal{F}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - x_1 \\ x_1 - 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}_2(x) = \begin{pmatrix} \cos^2 x_1 + 5 & \sin x_2 \cos x_1 \\ \sin x_2 \cos x_1 & \sin^2 x_2 + 0.2 \end{pmatrix}$, $H_2(x) = \frac{1}{4} x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4$ 。

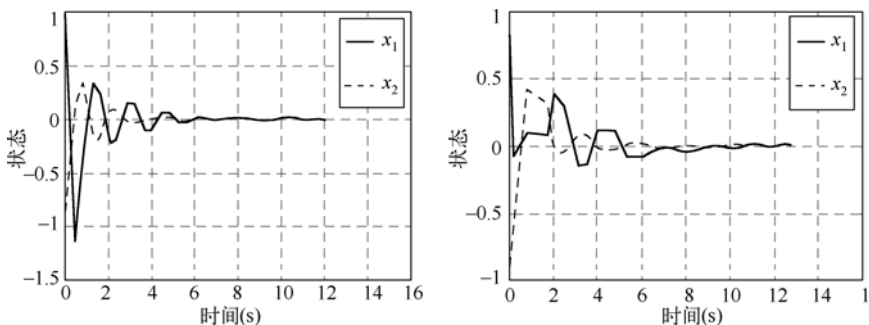
容易验证, 系统 (5.5.12) 满足定理 5.5.2 的条件。由定理 5.5.2 可得系统 (5.5.12) 在驻留时间大于零的任意切换路径下全局渐进稳定。

令初始值为 $x(0) = (-1 \ 1)^T$, 取如下两个不同的切换路径:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \begin{cases} 1, t \in [t_{2m}, t_{2m+1}), t_{2m+1} - t_{2m} = 0.5 \\ 2, t \in [t_{2m+1}, t_{2m+2}), t_{2m+2} - t_{2m+1} = 0.3 \end{cases} & m = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda_2(t) &= \begin{cases} 2, t \in [t_{2m}, t_{2m+1}), t_{2m+1} - t_{2m} = \text{rand} \\ 1, t \in [t_{2m+1}, t_{2m+2}), t_{2m+2} - t_{2m+1} = \text{rand} \end{cases} & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

式中, $0 < \text{rand} < 1$ 为一随机数。

数字仿真结果如图 5.5.1 所示, 由图可以看出在切换路径 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 下, 系统很快收敛到零平衡点, 验证了定理 5.5.2 的正确性和有效性。



(a) 系统在路径 $\lambda_1(t)$ 下的仿真

(b) 系统在路径 $\lambda_2(t)$ 下的仿真

图 5.5.1 切换耗散哈密顿系统仿真结果

几个推论:

利用上述得到的结果, 研究一般自治非线性切换系统。考虑切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{\lambda(t)}(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.5.13)$$

式中, $x \in R^n$ 是系统的状态; $f_i(x): R^n \rightarrow R^n$ 是连续向量场并且 $f_i(0)=0, i \in A$, 映射 $\lambda(t): [t_0, +\infty) \rightarrow A = \{1, 2, \dots, N\}$ 是分段常值函数。

对于任意的切换路径 $\lambda(t) = i_m \in A (t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, 2, \dots)$ 而言, $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 为其切换时间序列, 其对应的状态序列仍记为 $\{x_m\}_{m=0}^{+\infty}$, 驻留时间仍用 τ 表示。

假设 5.5.2 系统 (5.5.13) 的每个子系统都存在 Lyapunov 函数 $V_i(x), i=1, 2, \dots, N$, 且对 $\forall x, y \in R^n$ 满足 $V_i(x) > V_i(y) \Leftrightarrow \|x\|_p > \|y\|_p$ 。基于假设 5.5.2, 可得如下两个推论:

推论 5.5.1 在假设 5.5.2 下, 若 $\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) < 0 (x \neq 0), \forall i \in A$, 则系统 (5.5.12)

在驻留时间大于零的任意切换路径下都渐近稳定。

证明: 根据定理的条件可知, 系统 (5.5.13) 的所有子系统都是渐近稳定的。由参考文献[29]可知, 系统 (5.5.13) 的每一个子系统都有一个严格耗散哈密顿实现。取 $H_i(x) = V_i(x), i \in A$, 由参考文献[29]得

$$f_i(x) = T_i(x) \nabla H_i(x), T_i(x) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i(x) + S_i(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (5.5.14)$$

式中, $\mathfrak{F}_i(x) = \frac{1}{\|\nabla H_i(x)\|^2} [f_{id} \nabla^T H_i(x) - \nabla H_i(x) f_{id}^T]$, $f_{id} = f_i(x) - \frac{\langle f_i(x), \nabla H_i(x) \rangle}{\|\nabla H_i(x)\|^2}$

$$\nabla H_i(x), S_i(x) = \frac{\langle f_i(x), \nabla H_i(x) \rangle}{\|\nabla H_i(x)\|^2} I < 0, \nabla H_i(x) = \frac{\partial H_i(x)}{\partial x}。$$

则系统 (5.5.13) 就表述为一个切换耗散哈密顿系统, 并且满足定理 5.5.2 的所有条件。故由定理 5.5.2 可知, 推论成立。

推论 5.5.2 在假设 5.5.2 下, 若存在某个 Lyapunov 函数 $V_i(x)$ 满足

$$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(t, x) < 0 (x \neq 0), i \in A$$

则系统 (5.5.13) 在驻留时间大于零的任意切换路径 $\lambda(t)$ 下都是渐近稳定的。

证明: 根据参考文献[46]中推论 5.5.1 和参考文献[47]中的定理 3.2, 分别取 $H_i(x) = V_i(x), i \in A$ 可使下式成立:

$$f_i(x) = T_i(x) \nabla H_i(x), T_i(x) = \begin{cases} \mathfrak{J}_i(x) + S_i(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (5.5.15)$$

式中, $\mathfrak{J}_i(x)$ 、 $S_i(x)$ 定义同前述, 所不同的是 $S_l(x) < 0, S_i(x) \leq 0, \forall i \neq l \in A$ 。

因此, 系统 (5.5.13) 可表示为一个切换耗散哈密顿系统, 并且该系统满足定理 5.5.3 的全部条件。由定理 5.5.3 可知, 推论成立。

5.5.2 切换耗散哈密顿系统的 H_∞ 控制^[48]

在实际工业过程中, 由于系统本身固有属性以及某些随机因素的影响, 实际系统的某些参数会在无穷多个变量间发生跳变。这类系统可由含无穷个子模型的混杂切换系统来刻画。因而, 研究无穷个子模型的混杂切换系统, 不但具有重要的理论意义, 而且还有较好的应用前景。本节基于参考文献[49]所得的稳定结果, 研究含无穷个子模型的混杂切换哈密顿系统在 (任意) 切换路径下的 H_∞ 控制问题。首先针对系统有外部干扰的情形, 给出一种 H_∞ 鲁棒控制方案; 然后, 将得到的新结果运用到一般非线性混杂切换系统中, 得到了该类系统的 H_∞ 控制器。

1. 预备知识

考虑如下带干扰的混杂切换哈密顿系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \{\mathfrak{J}[x, \lambda(t)] - \mathcal{R}[x, \lambda(t)]\} \nabla H[x, \lambda(t)] + g_1[x, \lambda(t)]u + g_2[x, \lambda(t)]\omega \\ z = h[x, \lambda(t)]g_1^T[x, \lambda(t)] \nabla H[x, \lambda(t)] \\ \lambda(t) = c_m \in K, t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (5.5.16)$$

式中, $x \in R^n$ 是系统的状态; $u \in R^m$ 是系统的输入, $\omega \in R^q$ 是外部干扰; $\mathfrak{J}[x, \lambda(t)] = -\mathfrak{J}^T[x, \lambda(t)] \in R^{n \times n}$, $0 \leq \mathcal{R}[x, \lambda(t)] \in R^{n \times n}$, $g[x, \lambda(t)] \in R^{n \times m}$; $H[x, \lambda(t)]$ 是子系统的哈密顿函数, 且满足 $H[x, \lambda(t)] > 0 (\forall 0 \neq x \in R^n, \forall \lambda \in K)$, $H(0, \lambda) = 0$ 以及 $\nabla H[x, \lambda(t)] = \frac{\partial H[x, \lambda(t)]}{\partial x} (\forall \lambda \in K)$; $g_1[x, \lambda(t)] \in R^{n \times m}$, $g_2[x, \lambda(t)] \in R^{n \times q}$; $z \in R^s$ 是罚信号, $h[(x, \lambda(t))]$ 是一权矩阵; $\lambda(t): [t_0, +\infty) \rightarrow K \subseteq R$ 是分段常值函数, 称为切换途径, 并且 $\lambda(t) = c_m \in K, m = 0, 1, \dots$ 表示第 c_m 个子系统起作用; K 是一有界闭集, $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 为其切换时间序列, 并满足

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots, m = 0, 1, \dots \quad (5.5.17)$$

$\{x_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 是相应于切换时间序列的切换状态序列。

为方便起见, 令 $Z_+ \triangleq \{0, 1, \dots\}$ 表示非负整数集; $A \triangleq \{c_0, c_1, \dots\}$ 表示切换指标

集: $T_m \triangleq \{t_m, t_{m+1}\} (m \in \mathbb{Z}_+)$ 表示时间区间。不失一般性地, 本节假定切换路径满足式 (5.5.17) 以及① $t_m \rightarrow +\infty \Leftrightarrow m \rightarrow +\infty$, ② 指标集 A 不是一单点集。

类似于参考文献[44], 给出如下假设:

假设 5.5.3 对 $\forall c \in K$ 和 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 哈密顿函数 $H(x, c)$ 满足 $H(x, c) > H(y, c) \Leftrightarrow \|x\|_P > \|y\|_P$, 其中 $\|x\|_P = \sup_{\|x\|=1} x^T P x$, $P > 0$ 为一正定矩阵。要求 $H(x, c)$ 的函数值随

x 的 P 范数增加而增加。显然, 这一假设对绝大多数的切换哈密顿系统来说都能满足, 因而是一合理假设。

在假设 5.5.3 下, 有如下引理:

引理 5.5.1 若 $\mathcal{H}(x, c) > 0$, $\forall c \in K$, 则当 $u \equiv 0$ 和 $\omega \equiv 0$ 时, 系统 (5.5.16) 对于任意切换路径 $\lambda(t)$ 都是全局渐近稳定的^[32]。

引理 5.5.2 若系统 (5.5.16) 存在某个常数 $c_l \in K$ 使得 $\mathcal{H}(x, c_l) > 0$, 并且对于某一给定的切换路径 $\lambda(t)$, 存在一个切换时间子序列 $\{t_{m_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 使得 $\lambda(t) = c_l, t \in [t_{m_k}, t_{m_{k+1}})$, 则当 $u \equiv 0$ 和 $\omega \equiv 0$ 时, 系统 (5.5.16) 在该路径 $\lambda(t)$ 下是全局渐近稳定的^[49]。

2. 混杂切换哈密顿系统的 H_∞ 控制

本节研究系统 (5.5.16) 的 H_∞ 控制问题。基于非线性系统的 L_2 干扰抑制理论^[3], 设计系统 (5.5.16) 的一类 H_∞ 鲁棒控制器。

考虑系统 (5.5.16), 给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$ 和任一切换路径 $\lambda(t)$, 设计一个反馈控制律 $u = u[x, \lambda(t)]$ 使得:

① 对任意 $c_m \in A$, γ -耗散不等式

$$\dot{H}[x(t), c_m] + Q[x(t), c_m] \leq \frac{1}{2} \left\{ \gamma^2 \|\omega(t)\|^2 - \|z\|^2 \right\} \quad \forall \omega, t \in T_m, m \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.5.18)$$

沿着由系统 (5.5.16) 和 $u = u[x, \lambda(t)]$ 构成的闭环系统的所有轨线都成立。其中, $Q(x, c) \geq 0$ 为一标量函数。

② 当无外部干扰 ($\omega \equiv 0$) 时, 闭环系统渐近稳定。

对于上述的控制器设计, 有如下结果:

定理 5.5.4 在假设 5.5.3 下, 若给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 对 $\forall c \in K$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x, c) + \frac{1}{2\gamma^2} [g_1(x, c)g_1^T(x, c) - g_2^T(x, c)g_2(x, c)] \geq 0 \\ \mathcal{H}(x, c) + g_1(x, c) \left[\frac{1}{2} h^T(x, c)h(x, c) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x, c) > 0 \end{cases}$$

则在任意切换路径 $\lambda(t)$ 下, 系统 (5.5.16) 满足①和②的 H_∞ 鲁棒控制器可设计为

$u = u[x, \lambda(t)]$, 即

$$u(x, c_m) = - \left(\frac{1}{2} h^T(x, c_m) h(x, c_m) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right) g_1^T(x, c_m) \nabla H(x, c_m), t \in T_m, m = 1, 2, \dots \quad (5.5.19)$$

式中, I_m 为 $m \times m$ 单位矩阵, $Q(x, c_m)$ 可取为

$$Q(x, c_m) = \nabla^T H(x, c_m) \left\{ \mathcal{H}(x, c_m) + \frac{1}{2\gamma^2} [g_1(x, c_m) g_1^T(x, c_m) - g_2(x, c_m) g_2^T(x, c_m)] \right\}$$

$$\nabla H(x, c_m) \geq 0$$

定理 5.5.4 的证明详见参考文献[48]。

定理 5.5.5 在假设 5.5.3 下, 若给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 对 $\forall c \in K$ 满足

$$\mathcal{H}(x, c) + \frac{1}{2\gamma^2} (g_1(x, c) g_1^T(x, c) - g_2(x, c) g_2^T(x, c)) \geq 0$$

若系统 (5.5.16) 存在某个常数 $c_l \in K$, 使得

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x, c_l) + g_1(x, c_l) \left(\frac{1}{2} h^T(x, c_l) h(x, c_l) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right) g_1^T(x, c_l) > 0 \\ \mathcal{H}(x, c_i) + g_1(x, c_i) \left(\frac{1}{2} h^T(x, c_i) h(x, c_i) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right) g_1^T(x, c_i) \geq 0 \end{cases} \quad \forall c_i \neq c_l \in A, i, l \in Z_+$$

成立, 并对某一给定的切换路径 $\lambda(t)$, 存在一切换时间子序列 $\{t_{m_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 使得 $\lambda(t) = c_l, t \in [t_{m_k}, t_{m_{k+1}})$, 则系统 (5.5.16) 在该路径 $\lambda(t)$ 下满足①和②的鲁棒控制器可设计为式 (5.5.19)。证明略去。

下面介绍几个推论。

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f[x, \lambda(t)] - g_1[x, \lambda(t)]u + g_2[x, \lambda(t)]\omega \\ \lambda(t) = c_m \in K, t \in T_m, m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (5.5.20)$$

式中, $x \in R^n$ 是系统的状态; $u \in R^m$ 是系统的输入; $\omega \in R^s$ 是外部干扰; $f(x, \lambda): R^n \rightarrow R^n$ 是连续向量场, 并且 $f(0, \lambda) = 0, \forall \lambda \in K$, 映射 $\lambda(t): [t_0, +\infty) \rightarrow K$ 是一分段常值函数。

假设 5.5.4 系统 (5.5.20) 的每一子系统都存在一个 Lyapunov 函数 $V(x, c)$, $\forall c \in K$, 且对 $\forall x, y \in K$ 满足 $H(x, c) > H(y, c) \Leftrightarrow \|x\|_p > \|y\|_p$ 。

在假设 5.5.4 下, 为研究系统 (5.5.20) 的 H_∞ 鲁棒控制, 取罚信号为

$$z = h[x(t), c_m] g_1^T[x(t), c_m] \nabla V[x(t), c_m] \quad t \in T_m, m = 0, 1, \dots$$

系统 (5.5.20) 的 H_∞ 鲁棒控制可表述如下:

给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$ 和任一切换路径 $\lambda(t)$, 设计一个反馈控制律 $u = u[x, \lambda(t)]$, 使得:

① 对任意 $c_m \in A$ 以及 $\forall \omega, t \in T_m, m \in Z_+, \gamma$ -耗散不等式

$$\dot{H}[x(t), c_m] + Q[x(t), c_m] \leq \frac{1}{2} \left\{ \gamma^2 \|\omega(t)\|^2 - \|z[x(t)]\|^2 \right\} \quad (5.5.21)$$

沿着由系统 (5.5.20) 和 $u = u[x, \lambda(t)]$ 构成的闭环系统的所有轨线都成立, 其中 $Q[x(t), c_m] \geq 0$ 为一标量函数。

② 当无外部干扰 ($\omega = 0$) 时, 闭环系统渐近稳定。

综上所述, 可得系统 (5.5.20) 的 H_∞ 鲁棒控制结果, 见下面推论:

推论 5.5.3 在假设 5.5.3 下, 若给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 对 $\forall c \in K$ 满足

$$\begin{cases} \frac{L_{f(x,c)}V(x,c)}{\|\nabla V(x,c)\|^2} I_n + \frac{1}{2\gamma^2} [g_2(x,c)g_2^T(x,c) - g_1(x,c)g_1^T(x,c)] \leq 0 \\ -\frac{L_{f(x,c)}V(x,c)}{\|\nabla V(x,c)\|^2} I_n + g_1(x,c) \left[\frac{1}{2} h^T(x,c)h(x,c) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x,c) > 0 \end{cases}$$

则在任意切换路径 $\lambda(t)$ 下, 系统 (5.5.20) 满足①和②的鲁棒控制器可设计为 $u = u[x, \lambda(t)]$, 即

$$u(x, c_m) = - \left[\frac{1}{2} h^T(x, c_m)h(x, c_m) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x, c_m) \nabla H(x, c_m), t \in T_m, m \in Z_+ \quad (5.5.22)$$

式中, I_m 为 $m \times m$ 单位矩阵, $Q(x, c_m)$ 可取为

$$Q(x, c_m) = -\nabla^T H(x, c_m) \left(\frac{L_{f(x,c)}V(x,c)}{\|\nabla V(x,c)\|^2} I_n + \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} [g_2(x,c)g_2^T(x,c) - g_1(x,c)g_1^T(x,c)] \right\} \right)$$

$$\nabla H(x, c_m) \geq 0$$

推论 5.5.4 在假设 5.5.3 下, 若给定一干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 对 $\forall c \in K$ 满足

$$\frac{L_{f(x,c)}V(x,c)}{\|\nabla V(x,c)\|^2} I_n + \frac{1}{2\gamma^2} [g_2(x,c)g_2^T(x,c) - g_1(x,c)g_1^T(x,c)] \leq 0$$

若系统 (5.5.16) 存在某个常数 $c_l \in Q$ 使得

$$\begin{cases} -\frac{L_{f(x,c_l)}V(x,c_l)}{\|\nabla V(x,c_l)\|^2} I_n + g_1(x,c_l) \left[\frac{1}{2} h^T(x,c_l)h(x,c_l) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x,c_l) > 0 \\ -\frac{L_{f(x,c_l)}V(x,c_l)}{\|\nabla V(x,c_l)\|^2} I_n + g_1(x,c_l) \left[\frac{1}{2} h^T(x,c_l)h(x,c_l) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x,c_l) > 0 \end{cases} \quad \forall c_l \neq c_i \in Q, i, l \in Z_+$$

并且对某一给定的切换路径 $\lambda(t)$, 存在一切换时间子序列 $\{t_{m_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 使得 $\lambda(t)=c_l$, $t \in [t_{m_k}, t_{m_{k+1}})$ 则系统 (5.5.20) 在该路径 $\lambda(t)$ 下, 满足①和②的鲁棒控制器可设计为式 (5.5.22)。

例 5.5.2 考虑混杂切换哈密顿系统

$$\begin{cases} \dot{x} = [\mathfrak{J}(x, \lambda) - \mathcal{R}(x, \lambda)] \nabla H(x, \lambda) + g_1(x, \lambda)u + g_2(x, \lambda)\omega, x(0) = x_0 \\ z = h(x, \lambda)g_1^T(x, \lambda) \nabla H(x, \lambda) \\ \lambda(t) = c_m \in K, t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (5.5.23)$$

式中, $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T \in R^3$, $u = (u_1 \ u_2)^T \in R^2$, $\omega \in R^2$, 并且

$$\mathfrak{J}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_3^2 - 1 & \sin x_2^2 \\ 1 - \lambda x_3^2 & 0 & -\lambda x_1 \\ -\sin x_2^2 & \lambda x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0.5 + 2\lambda^2 x_2^2 & 0 & 0.5\lambda x_2 \\ 0 & 0.4 + 5x_3^2 & 0 \\ 0.5\lambda x_2 & 0 & 0.7 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda x_3 \\ -\lambda x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda x_2 & 0 \\ 0 & -3x_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$H(x, \lambda) = \lambda \left(x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + 3x_3^2 \right), \quad K := (0 \ 2 \ 4 \ 2)。$$

容易验证, 系统 (5.5.23) 对假设 5.5.3 成立, 并且对任意 $\forall c \in K$ 以及任意干扰抑制水平 $\gamma \geq 1/2$, 易验证

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x, c) + \frac{1}{2\gamma^2} [g_1(x, c)g_1^T(x, c) - g_2(x, c)g_2^T(x, c)] \geq 0 \\ \mathcal{R}(x, c) + g_1(x, c) \left[\frac{1}{2} h^T(x, c)h(x, c) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g_1^T(x, c) > 0 \end{cases}$$

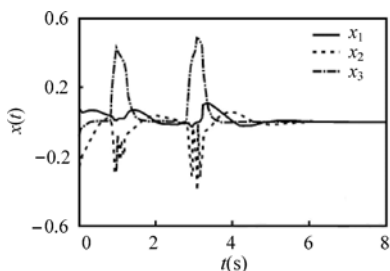
即系统 (5.5.23) 满足定理 5.5.4 的所有条件。由定理 5.5.4 可知, 系统 (5.5.23) 在任意切换路径 $\lambda(t)$ 下的 H_∞ 鲁棒控制器可设计为 $u[t] = u[x, \lambda(t)]$, 其中

$$\begin{cases} u(x, c_m) = - \left[\frac{1}{2} h^T(x, c_m)h(x, c_m) + \frac{1}{2\gamma^2} I_2 \right] g_1^T(x, c_m) \nabla H(x, c_m) \\ t \in T_m, c_m \in K, m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (5.5.24)$$

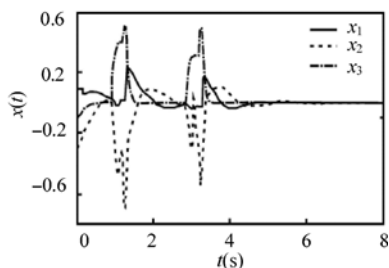
为验证上述鲁棒控制器的有效性, 下面给出数值仿真。取干扰抑制水平 $\gamma = 1$, 初始值 $x(0) = (0.1 \ -0.3 \ -0.1)^T$ 以及如下两个不同的切换路径:

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_m = 0.2 + 4 \times \text{rand}, t \in [t_m, t_{m+1}), t_{m+1} - t_m = 0.01, m = 0.1, \dots \\ \lambda_2(t) = c_m = 0.2 + 4 \times \text{rand}, t \in [t_m, t_{m+1}), t_{m+1} - t_m = 0.1 \times \text{rand}, m = 0.1, \dots \end{cases}$$

其中, $0 < \text{rand} < 1$ 为一随机数。分别在时间区间 $(0.8 \sim 1.2\text{s})$ 和 $(2.8 \sim 3.2\text{s})$ 上加外部干扰 $\omega = (4 \quad 4)^T$ 。仿真结果如图 5.5.2 所示, 即系统 (5.5.23) 在两个不同切换路径 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 下的状态 x 的响应曲线。



(a) 系统在路径 $\lambda_1(t)$ 下的仿真



(b) 系统在路径 $\lambda_2(t)$ 下的仿真

图 5.5.2 两个不同切换路径下的状态 x 的响应曲线

从图 5.5.2 可以看出, 在切换路径 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 下, 闭环系统很快收敛到零平衡点。由此可知, 鲁棒控制器 (5.5.24) 可以很好地镇定系统 (5.5.23)。

第 6 章 无源控制理论在电力电子装置中的应用

6.1 无源控制理论在 AC/DC 变换器中的应用

AC/DC 变换器是将交流电能转换成直流电能的装置。为实现变换器交流侧单位功率因数、交流电流正弦化、直流侧直流电压恒定控制以及能量双向流动，已将 PWM 技术应用到变换器中，以实现电能“绿色变换”。为提高 AC/DC 变换器的控制性能，国内外学者已将无源控制理论用于变换器控制中^[50]，获得了良好的控制效果。下面系统的论述基于 EL 模型及 PCHD 模型的 AC/DC 变换器无源控制。

6.1.1 基于 EL 模型的 AC/DC 变换器无源控制

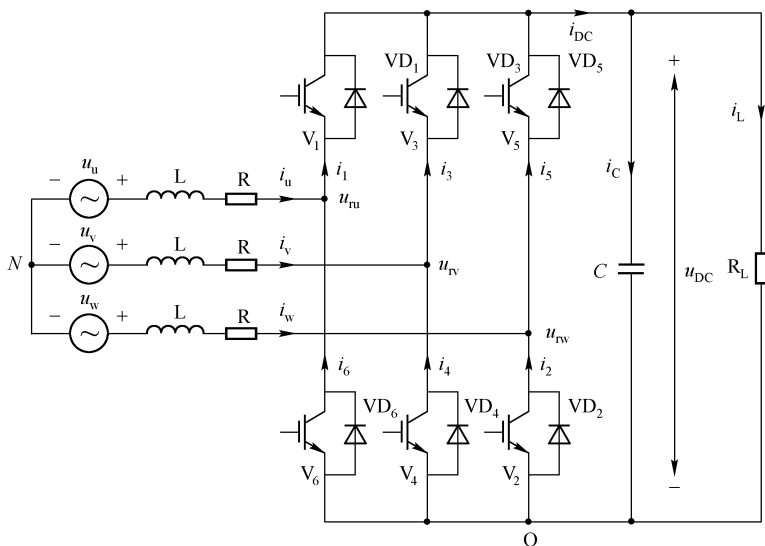
1. 电压型 PWM AC/DC 变换器数学模型

(1) AC/DC 变换器基本数学模型

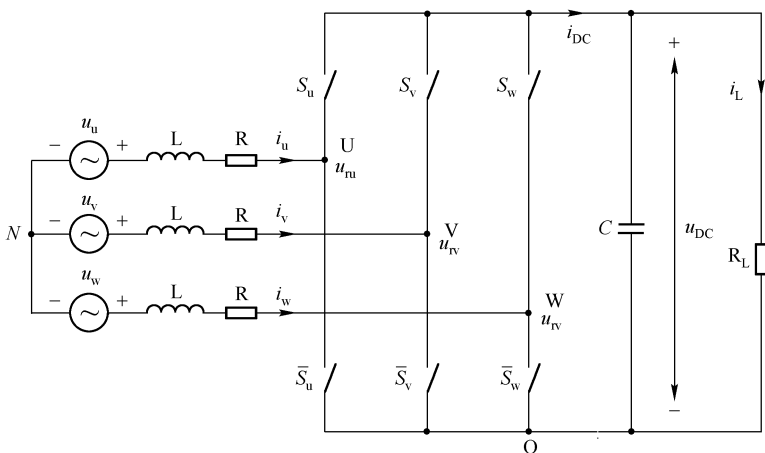
三相电压型 AC/DC 变换器主电路拓扑结构如图 6.1.1 (a) 所示。为建立图 6.1.1 (a) 所示整流器的数学模型作如下假设：①电源为三相对称正弦电压；②滤波电感是线性的，且不考虑饱和；③开关管为理想开关，无导通关断延时，无损耗。由上述假设得到三相电压型 PWM AC/DC 变换器的主电路如图 6.1.1 (b) 所示。图中， u_u 、 u_v 、 u_w 为三相对称电源相电压； i_u 、 i_v 、 i_w 为三相线电流； S_u 、 S_v 、 S_w 为变换器的开关函数， S_j 定义为单极性二值逻辑开关函数， S_j ($j=u, v, w$) = 1 (上桥臂导通，下桥臂关断)， $S_j=0$ (下桥臂导通，上桥臂关断)； u_{DC} 为直流电压； R 、 L 为滤波电抗器的电阻和电感； C 为直流侧电容； R_L 为负载电阻； u_{ru} 、 u_{rv} 、 u_{rw} 为变换器的输入相电压； u_{DC} 为直流侧电压； i_L 为负载电流。

在三相平衡电源电压情况下，变换器的基本模型^[51]为

$$\begin{cases} L \frac{di_u}{dt} = u_u - Ri_u - u_{DC}(S_u - \frac{1}{3} \sum_{j=u,v,w} S_j) = u_u - Ri_u - u_{ru} \\ L \frac{di_v}{dt} = u_v - Ri_v - u_{DC}(S_v - \frac{1}{3} \sum_{j=u,v,w} S_j) = u_v - Ri_v - u_{rv} \\ L \frac{di_w}{dt} = u_w - Ri_w - u_{DC}(S_w - \frac{1}{3} \sum_{j=u,v,w} S_j) = u_w - Ri_w - u_{rw} \\ C \frac{du_{DC}}{dt} = \frac{u_{DC}}{R_L} - S_u i_u - S_v i_v - S_w i_w = i_L - S_u i_u - S_v i_v - S_w i_w \end{cases} \quad (6.1.1)$$



(a)



(b)

图 6.1.1 AC/DC 变换器主电路拓扑结构

(2) AC/DC 变换器 EL 数学模型

由于 AC/DC 变换器基本数学模型 (6.1.1) 中存有时变的三相正弦交流电压, 不利于无源控制器的设计。对此通过等量变换矩阵

$$\mathbf{M}_{uvw/dq0} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \cos(\omega t - 120^\circ) & \cos(\omega t + 120^\circ) \\ \sin \omega t & \sin(\omega t - 120^\circ) & \sin(\omega t + 120^\circ) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{uvw/dq0}^{-1} = \mathbf{M}_{dq0/uvw} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 1 \\ \cos(\omega t - 120^\circ) & \sin(\omega t - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\omega t + 120^\circ) & \sin(\omega t + 120^\circ) & 1 \end{pmatrix}$$

经等量变换后，三相电压型 PWM AC/DC 变换器在两相同步旋转坐标系 dq 中的数学模型为

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = u_d - Ri_d + L\omega i_q - S_d u_{DC} \\ L \frac{di_q}{dt} = u_q - Ri_q - L\omega i_d - S_q u_{DC} \\ \frac{2}{3}C \frac{du_{DC}}{dt} = (S_d i_d + S_q i_q) - \frac{2}{3}i_L \end{cases} \quad (6.1.2)$$

式中， S_d 、 S_q 分别为开关函数在 d 、 q 轴上的分量。

把式 (6.1.2) 转换成如下形式：^[51]

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{du_{DC}}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega L & S_d \\ \omega L & 0 & S_q \\ -S_d & -S_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 2/3R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.3)$$

式 (6.1.3) 可以写成 EL 的形式

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (6.1.4)$$

式中， \mathbf{M} 为正定的对角阵； \mathbf{J} 为反对称矩阵， $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$ ，反映了系统内部的互联结构； \mathbf{R} 为对称正定矩阵，反映了系统的耗散特性；系统与外部能量交换由 \mathbf{u} 表示。各矩阵具体表达式为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C/3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega L & S_d \\ \omega L & 0 & S_q \\ -S_d & -S_q & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 2/3R_L \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix}。$$

2. 电压型 PWM AC/DC 变换器无源性

对于三相电压型 PWM AC/DC 变换器，设系统的存储能量函数 $H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ ，

由式 (6.1.4) 可得

$$\dot{H} = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{u} - \mathbf{J}\mathbf{x} - \mathcal{R}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{u} - \mathbf{x}^T \mathcal{R} \mathbf{x} \quad (6.1.5)$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ 、 $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathcal{R} \mathbf{x}$ ，式 (6.1.5) 与式 (2.1.10) 形式一样，则三相电压型 PWM AC/DC 变换器为严格无源的，可进行无源控制器设计。

3. 无源控制器设计

(1) 期望稳定平衡点的确定

三相电压型 PWM AC/DC 变换器系统在稳态运行时，期望功率因数为 1，直流电压等于给定电压 u_{DCR} ，按 $u_{\text{DCR}} > \sqrt{3}U_m$ （相电压幅值）确定，则期望稳定平衡点 $x_1^* = I_m$ （网侧相电流的幅值）、 $x_2^* = 0$ 、 $x_3^* = u_{\text{DCR}}$ 。

根据稳态时交直流侧功率平衡方程

$$\frac{3}{2}U_m I_m - \frac{3}{2}R I_m^2 = \frac{u_{\text{DCR}}^2}{R_L} \quad (6.1.6)$$

得到 I_m 的计算式

$$I_m = \frac{1}{2} \left[\frac{U_m}{R} - \sqrt{\left(\frac{U_m}{R} \right)^2 - \frac{8u_{\text{DCR}}^2}{3RR_L}} \right] \quad (6.1.7)$$

(2) 无源控制器设计

选择系统的误差存储函数为

$$H_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (6.1.8)$$

式中， \mathbf{x}^* 为系统的期望平衡点。

为使系统快速收敛到期望点，使误差能量函数快速变零，需注入阻尼，加速系统能量耗散。采用注入阻尼设计控制器有以下两种方法：

① 方法 I ^[52]

注入阻尼耗散项设为

$$\mathcal{R}_d \mathbf{x}_e = (\mathcal{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e \quad (6.1.9)$$

式中， \mathbf{R}_a 为正定矩阵。则方程 (6.1.4) 可变为

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{J} \mathbf{x}_e + \mathcal{R} \mathbf{x}_e = \mathbf{u} - (\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J} \mathbf{x}^* + \mathcal{R} \mathbf{x}^* - \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e) \quad (6.1.10)$$

选择控制律

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J} \mathbf{x}^* + \mathcal{R} \mathbf{x}^* - \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e \quad (6.1.11)$$

使 $\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{J} \mathbf{x}_e + \mathcal{R} \mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ，有

$$\dot{H}_e = -\mathbf{x}_e^T (\mathcal{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e < 0 \quad (6.1.12)$$

由式 (6.1.12) 可以看出, 系统收敛速度快, 并与 \mathbf{R}_a 有关。

根据式 (6.1.11), 考虑到 $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0}$, 可得系统无源控制律为

$$\begin{cases} S_d = \frac{U_m + R_{a1}i_d - I_m(R_{a1} + R)}{u_{\text{DCR}}} \\ S_q = \frac{u_{lq} + R_{a2}i_q - \omega LI_m}{u_{\text{DCR}}} \end{cases} \quad (6.1.13)$$

将式 (6.1.13) 代入式 (6.1.2) 得

$$\begin{cases} Lu_{\text{DCR}} \frac{di_d}{dt} = U_m(u_{\text{DCR}} - u_{\text{DC}}) + R_{a1}u_{\text{DC}}(I_m - i_d) + R(I_mu_{\text{DC}} - i_d u_{\text{DCR}}) + \omega Lu_{\text{DCR}}i_q \\ Lu_{\text{DCR}} \frac{di_q}{dt} = -i_q(Ru_{\text{DCR}} - R_{a2}u_{\text{DC}}) + \omega L(I_mu_{\text{DC}} - u_{\text{DCR}}i_d) \\ Cu_{\text{DCR}} \frac{du_{\text{DC}}}{dt} = \frac{3}{2}U_m i_d + \frac{3}{2}(R_{a1}i_d^2 + R_{a2}i_q^2) - \frac{3}{2}I_m(R_{a1} + R)i_d - \frac{3}{2}\omega LI_m i_q - \frac{u_{\text{DCR}}u_{\text{DC}}}{R_L} \end{cases} \quad (6.1.14)$$

由式 (6.1.14) 可以看出, 有阻尼注入时, 系统存在强耦合, 即在动态过程中系统控制性能只是加速收敛, 其他方面没有得到改善^[51]。当系统趋于理想稳态时, 即 $i_d = I_m$, $i_q = 0, u_{\text{DC}} = u_{\text{DCR}}$, 式 (6.1.14) 均能得到满足。若工程实际中受某种因素影响, 导致 $i_d \neq I_m, i_q \neq 0$, 系统的动、静性能必受到影响, 易影响直流电压。

② 方法 II^[53]

由式 (6.1.14) 可知, 控制律 (6.1.13) 使系统在动态、静态时出现了强耦合, 是影响变换器性能原因所在。对此, 需改进控制器设计。

期望稳定平衡点确定同无源控制器设计方法 I。

把式 (6.1.10) 改为如下形式:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{R}_d \mathbf{x}_e = \mathbf{u} - [\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}(\mathbf{x}^* + \mathbf{x}_e) + \mathbf{R}\mathbf{x}^* - \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e] \quad (6.1.15)$$

选取控制律为

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x}^* - \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e \quad (6.1.16)$$

控制律 (6.1.16) 可以使 $\dot{H} = -\mathbf{x}_e^T (\mathbf{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e < 0$, 则误差能量函数收敛速度与采用控制律 (6.1.11) 时相同。

根据控制律 (6.1.16) 可得新的无源控制律

$$\begin{cases} S_d = \frac{u_d + \omega Li_q - RI_m + R_{a1}(i_d - I_m)}{u_{\text{DC}}} \\ S_q = \frac{-\omega Li_d + R_{a2}i_q}{u_{\text{DC}}} \end{cases} \quad (6.1.17)$$

将控制律 (6.1.17) 代入式 (6.1.2) 得

$$\begin{cases} \frac{L}{R+R_{a1}} \frac{di_d}{dt} + i_d = I_m \\ \frac{L}{R+R_{a2}} \frac{di_q}{dt} + i_q = 0 \\ Cu_{DC} \frac{du_{DC}}{dt} = \frac{3}{2} U_m i_d - \frac{3}{2} R I_m i_d + \frac{3}{2} R_{a1} i_d (i_d - I_m) + \frac{3}{2} R_{a2} i_q^2 - \frac{u_{DC}^2}{R_L} \end{cases} \quad (6.1.18)$$

若 R_{a1} 、 R_{a2} 选择比较大, 则 i_d 很快稳定于 I_m , i_q 稳定于 0, 则有

$$\begin{cases} \frac{L}{R+R_{a1}} \frac{di_d}{dt} + i_d = I_m \\ \frac{L}{R+R_{a2}} \frac{di_q}{dt} + i_q = 0 \\ Cu_{DC} \frac{du_{DC}}{dt} = \frac{3}{2} U_m I_m - \frac{3}{2} R I_m^2 - \frac{u_{DC}^2}{R_L} \end{cases} \quad (6.1.19)$$

式 (6.1.19) 中第三个等式满足功率平衡, u_{DC} 的稳态值为 u_{DCR} 。

式 (6.1.19) 表明控制律 (6.1.17) 可实现系统动态和静态解耦, 提高系统的动、静性能。

在电源相电压 220V、 $f=50\text{Hz}$ 、电感 $L=16\text{mH}$ 、电阻 $R=0.3\Omega$ 、 $C=2200\mu\text{F}$ 、额定负载 $R_L=100\Omega$ 、调制频率 5kHz 及 $u_{DCR}=600\text{V}$ 的情况下, 研究方法 II 设计无源控制器效果。

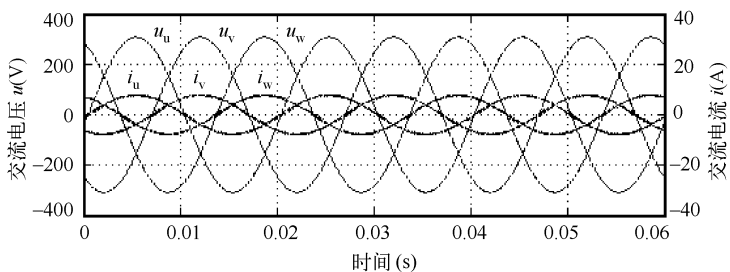
为考核采用方法 II 设计无源控制器变换器的性能, 采用性能指标: THD、功率因数 PF、直流电压稳态误差 ΔU_{DC} 、直流动态电压 Δu_{DC} (负载电阻突变 50Ω 或 200Ω 时动态电压)、启动时间 t_r (直流电压上升到 $0.95 u_{DCR}$ 的时间) 进行考核。

A. 平衡电源电压情况

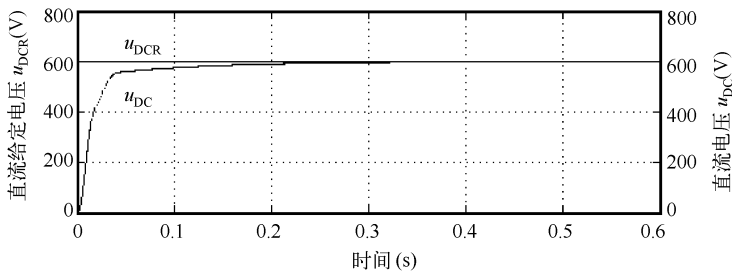
$R_a=10\Omega$ 、 $R_L=100\Omega$ 时变换器启动过程如图 6.1.2 所示; 稳态时受负载扰动工作状态如图 6.1.3 所示, 图中 A 为负载从 100Ω 变为 50Ω 的点, B 为负载从 50Ω 变为 100Ω 的点, C 为负载从 100Ω 变为 200Ω 的点, D 为负载从 200Ω 变为 100Ω 的点。在 R_a 分别为 10Ω 、 50Ω 、 100Ω 时变换器的性能见表 6.1.1。

B. 电源电压相位扰动情况

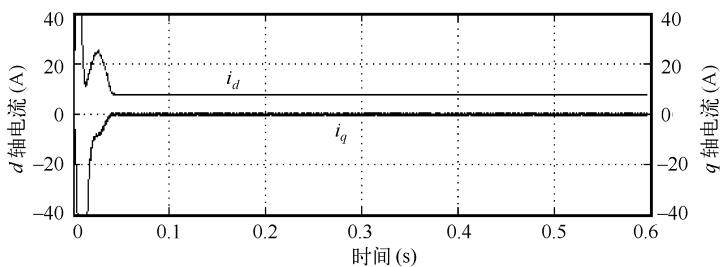
设 u 相电源电压变为 $u_u=311\sin(314t+\pi/12)$, v 、 w 相电源电压不变。 $R_a=10\Omega$ 、 $R_L=100\Omega$ 时变换器启动过程工作曲线如图 6.1.4 所示; 稳态时受负载扰动工作状态如图 6.1.5 所示。在 R_a 分别为 10Ω 、 50Ω 、 100Ω 时变换器的性能见表 6.1.2。



(a) 三相交流稳态电压、电流

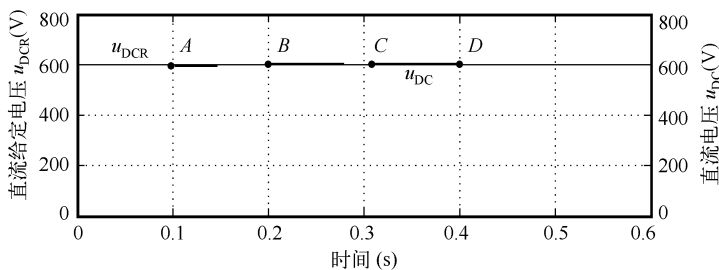


(b) 启动过程中的直流给定电压、直流电压



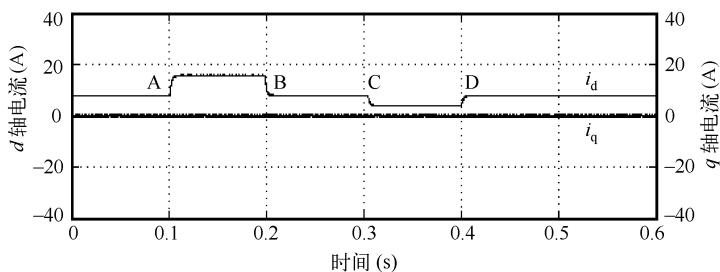
(c) 启动过程中的 d 轴电流、 q 轴电流

图 6.1.2 $R_a = 10\Omega$ 、 $R_L = 100\Omega$ 时变换器工作状态



(a) 负载扰动时的直流电压

图 6.1.3 $R_a = 10\Omega$ 负载扰动时变换器工作状态

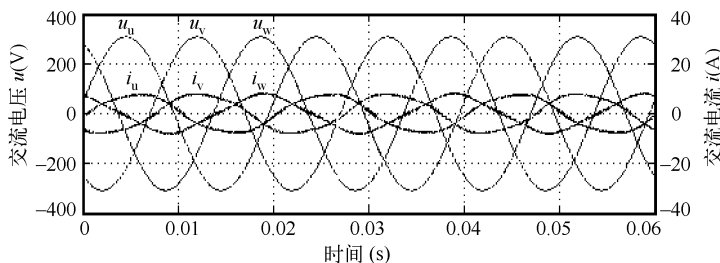


(b) 负载扰动时的 d 轴电流、 q 轴电流

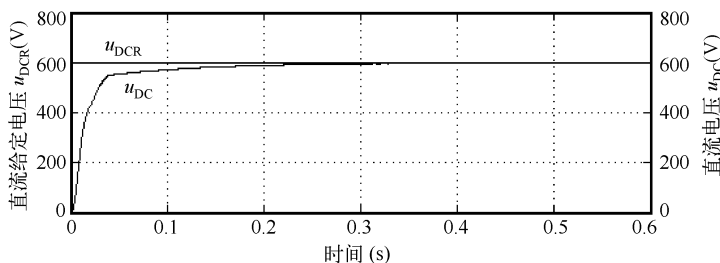
图 6.1.3 $R_a = 10\Omega$ 负载扰动时变换器工作状态 (续)

表 6.1.1 电源平衡时无源控制器III参数与变换器性能

性能参数	$R_a=10\Omega$	$R_a=50\Omega$	$R_a=100\Omega$
THD (%)	3.3	3.3	3.3
PF	1	1	1
ΔU_{DC} (V)	1.3	0.3	0.04
Δu_{DC} (V)	3	2	1.6
t_r (s)	0.05	0.03	0.027

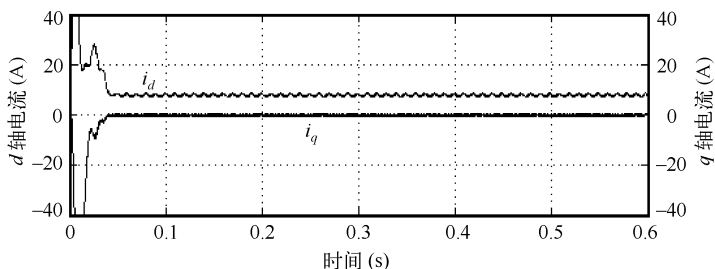


(a) 三相交流稳态电压、电流



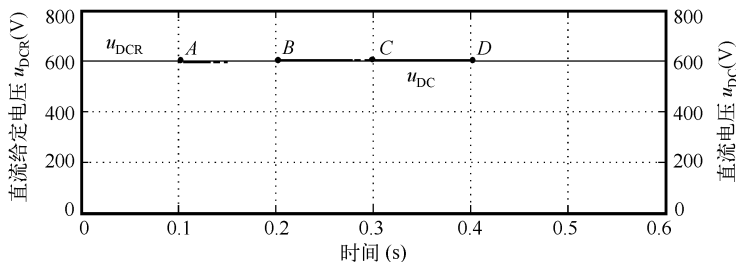
(b) 启动过程中的直流给定电压、直流电压

图 6.1.4 $R_a = 10\Omega$ 和 $R_L = 100\Omega$ 时变换器工作状态

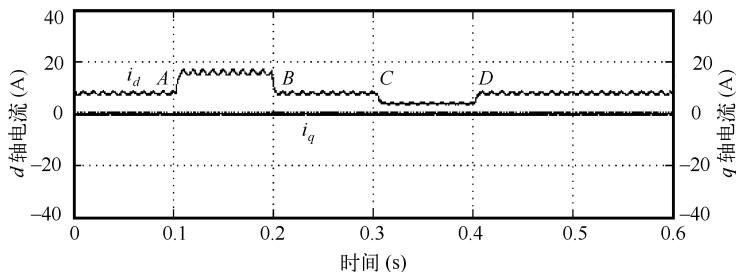


(c) 启动过程中的 d 轴电流、 q 轴电流

图 6.1.4 $R_a=10\Omega$ 和 $R_L=100\Omega$ 时变换器工作状态 (续)



(a) 负载扰动时的直流电压



(b) 负载扰动时的 d 轴电流、 q 轴电流

图 6.1.5 $R_a=10\Omega$ 负载扰动时变换器工作状态

表 6.1.2 电源不平衡时无源控制器Ⅲ参数与变换器性能

性能参数	$R_a=10\Omega$	$R_a=50\Omega$	$R_a=100\Omega$
THD (%)	4.6	5.4	5.5
PF	1	1	1
ΔU_{DC} (V)	1.2	0.63	0.4
Δu_{DC} (V)	4.2	3.2	2.8
t_r (s)	0.07	0.055	0.05

由图 6.1.2~图 6.1.5 及表 6.1.1~表 6.1.2 可以看出, 控制律 (6.1.17) 使变换器的 THD、 ΔU_{DC} 、 Δu_{DC} 、 t_r 明显变小, PF 提高。 R_a 变大, ΔU_{DC} 、 Δu_{DC} 及 t_r 变小, THD 稍有变大; 反之亦然。因此, 采用新的无源控制律 (6.1.17) 的变换器性能要优于采用无源控制律 (6.1.13) 时的性能。

另外, 可采用无源性功率控制策略^[54]可获得更好的控制效果。

6.1.2 基于 PCHD 模型的 AC/DC 变换器无源控制^[51、55、56]

1. 电压型 PWM AC/DC 变换器的 PCHD 数学模型

令 $x_1 = Q = Cu_{DC}$, $x_2 = \psi_1 = Li_d$, $x_3 = \psi_2 = Li_q$, 系统总能量 $H(x) = \frac{x_1^2}{2C} + \frac{x_2^2}{2L} + \frac{x_3^2}{2L}$, 可得

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = S_d \frac{x_2}{L} + S_q \frac{x_3}{L} - \frac{x_1}{R_L C} \\ \frac{dx_2}{dt} = u_d - R \frac{x_2}{L} + \omega x_3 - S_d \frac{x_1}{C} \\ \frac{dx_3}{dt} = u_q - R \frac{x_3}{L} - \omega x_2 - S_q \frac{x_1}{C} \end{cases} \quad (6.1.20)$$

利用系统总能量 $H(x)$ 将式 (6.1.20) 变换为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_d & S_q \\ -S_d & 0 & \omega L \\ -S_q & -\omega L & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{R_L} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.21)$$

式 (6.1.21) 可简写为

$$\dot{x} = (J - \mathcal{R}) \frac{\partial H}{\partial x} + gu \quad (6.1.22)$$

$$\text{式中, } J = \begin{pmatrix} 0 & S_d & S_q \\ -S_d & 0 & \omega L \\ -S_q & -\omega L & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1/R_L & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix}, J =$$

$-J^T, \mathcal{R} = \mathcal{R}^T$ 。

式 (6.1.22) 称为电压型 PWM AC/DC 变换器端口受控的耗散哈密顿

(PCHD) 模型。

2. 基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM AC/DC 变换器控制策略 I

(1) 期望稳定平衡点确定

三相电压型 PWM AC/DC 变换器系统在稳态运行时, 功率因数为 1, 直流电压等于给定电压 u_{DCR} , 按 $u_{\text{DCR}} > \sqrt{3}U_m$ (相电压幅值) 确定; 则有 $i_d = \sqrt{\frac{3}{2}}I_m$ (I_m 为稳态运行时交流相电流的幅值, 按式 (6.1.7) 计算, $i_q = 0$ $u_{\text{DC}} = u_{\text{DCR}}$ 得 $x_1^* = Cu_{\text{DCR}}, x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}}LI_m, x_3^* = 0$ 。

(2) 控制器设计

由式 (6.1.21) 可知, gu 为定值, 可将 S_d 、 S_q 视为变换器的控制量。下面根据式 (6.1.21), 在 5.2.3 节条件下确定出使系统在期望平衡点 x^* 处具有最小的能量的 S_d 、 S_q 。

利用式 (5.2.88) 可得

$$(J_d - \mathcal{H}_d) \frac{\partial H_a}{\partial x} + (J_a - \mathcal{H}_a) \frac{\partial H}{\partial x} - gu = 0 \quad (6.1.23)$$

式中, $J_d = J + J_a, \mathcal{H}_d = \mathcal{H} + \mathcal{H}_a, H_d = H + H_a$ 。

$$\text{令 } K(x) = (k_1(x) \quad k_2(x) \quad k_3(x))^T = \left(\frac{\partial H_a}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_3} \right)^T, \text{ 取 } J_a = 0, \mathcal{H}_a = 0,$$

由式 (6.1.23) 得

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & S_d & S_q \\ -S_d & 0 & \omega L \\ -S_q & -\omega L & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/R_L & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ u_d \\ u_q \end{pmatrix} = 0 \quad (6.1.24)$$

由式 (6.1.24) 可得

$$\begin{cases} -k_1/R_L + S_d k_2 + S_q k_3 = 0 \\ -S_d k_1 - R k_2 + \omega L k_3 - u_d = 0 \\ -S_q k_1 - \omega L k_2 - R k_3 - u_q = 0 \end{cases} \quad (6.1.25)$$

由式 (6.1.25) 中的第二、第三个等式可得

$$\begin{cases} S_d = \frac{-R k_2 + \omega L k_3 - u_d}{k_1} \\ S_q = \frac{-\omega L k_2 - R k_3 - u_q}{k_1} \end{cases} \quad (6.1.26)$$

将式 (6.1.26) 代入式 (6.1.25) 中第一个等式可得

$$k_1 = -\sqrt{R_L(Rk_2^2 + u_d k_2 + Rk_3^2 + u_q k_3)} \quad (6.1.27)$$

为简化控制器, 设 $k_1(x)$ 、 $k_2(x)$ 、 $k_3(x)$ 均为 x_1 的函数, 根据可积性 (5.2.90), 有

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_2} = \frac{\partial k_2}{\partial x_1}, \frac{\partial k_1}{\partial x_3} = \frac{\partial k_3}{\partial x_1}, \frac{\partial k_2}{\partial x_3} = \frac{\partial k_3}{\partial x_2}$$

得 $k_2 = A_1, k_3 = A_2$ 。

为实现在 $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ 处 H_d 有极值, 根据 $\frac{\partial H_d}{\partial x} = 0$ 可得

$$\begin{cases} \frac{x_1^*}{C} + k_1 = 0 \\ \frac{x_2^*}{L} + A_1 = 0 \\ \frac{x_3^*}{L} + A_2 = 0 \end{cases} \quad (6.1.28)$$

由式 (6.1.27)、式 (6.1.28) 并考虑到, $u_q = 0$, $x_1^* = Cu_{\text{DCR}}, x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}}LI_m$, $x_3^* = 0$, 可得

$$\begin{cases} k_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}R_L(I_m U_m - RI_m^2)} \\ k_2 = A_1 = -\frac{x_2^*}{L} = -\sqrt{\frac{3}{2}}I_m \\ k_3 = A_2 = -\frac{x_3^*}{L} = 0 \end{cases} \quad (6.1.29)$$

利用 x^* 处功率守恒 $\frac{3}{2}(I_m U_m - RI_m^2) = \frac{u_{\text{DCR}}^2}{R_L}$, 式 (6.1.29) 满足条件 (5.2.91), 可由 k_1 、 k_2 、 k_3 确定 H_a , 即

$$H_a = -x_1 \sqrt{\frac{3}{2}R_L(I_m U_m - RI_m^2)} - \frac{x_2^*}{L} x_2 \quad (6.1.30)$$

则有

$$H_d = \frac{x_1^2}{2C} + \frac{x_2^2}{2L} + \frac{x_3^2}{2L} - x_1 \sqrt{\frac{3}{2}R_L(I_m U_m - RI_m^2)} - \frac{x_2^*}{L} x_2 \quad (6.1.31)$$

为保证 H_d 在 x^* 最小值, H_d 的海森矩阵满足 $\left. \frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2} \right|_{x=x^*} > 0$ 。

根据式 (6.1.31) 可得

$$\left. \frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2} \right|_{x=x^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (6.1.32)$$

由于 $\left. \frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2} \right|_{x=x^*}$ 是正定的, 满足条件 (5.2.92)。

将 k_1 、 k_2 、 k_3 的表达式代入式 (6.1.26), 并考虑到 $R_L = u_{DC}/i_L$, 可得变换器控制律

$$\begin{cases} S_d = \frac{RI_m - U_m}{-\sqrt{u_{DC}(I_m U_m - RI_m^2)}/i_L} \\ S_q = \frac{\omega LI_m}{-\sqrt{u_{DC}(I_m U_m - RI_m^2)}/i_L} \end{cases} \quad (6.1.33)$$

按照式 (6.1.33) 构成的基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM 变换器无源系统如图 6.1.6 所示。由图可见, 系统没用电流传感器, 这种简化可提高变换器的可靠性。

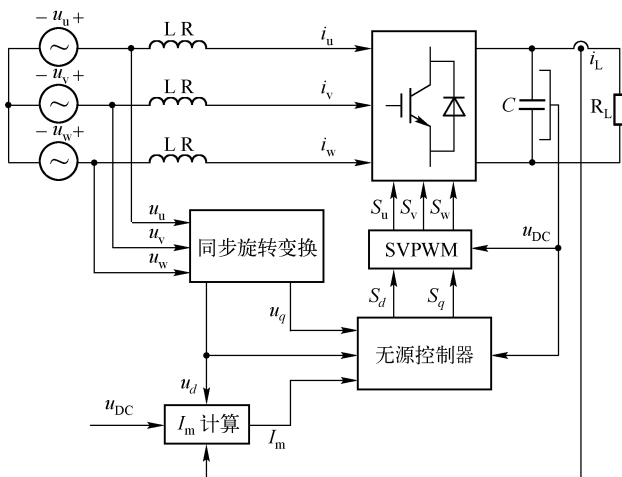
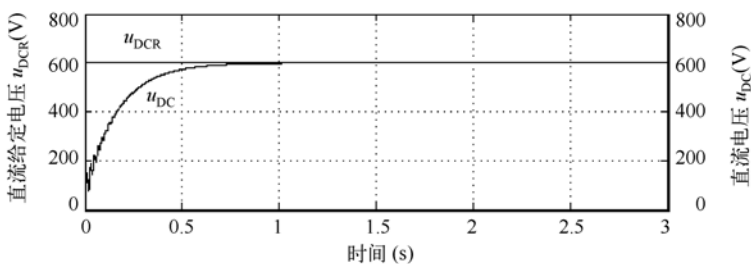


图 6.1.6 基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM AC/DC 变换器无源系统

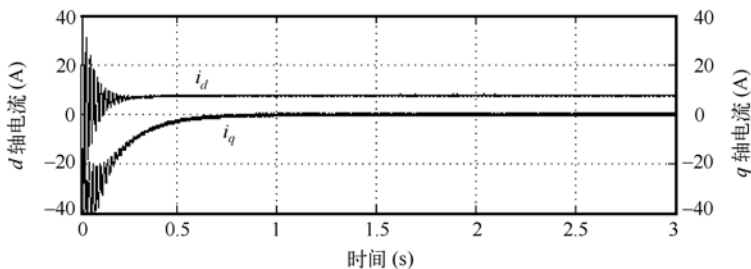
(3) 系统仿真研究

按图 6.1.6 构建了 smulink 环境下的仿真模型, 仿真参数为电源相电压 220V、

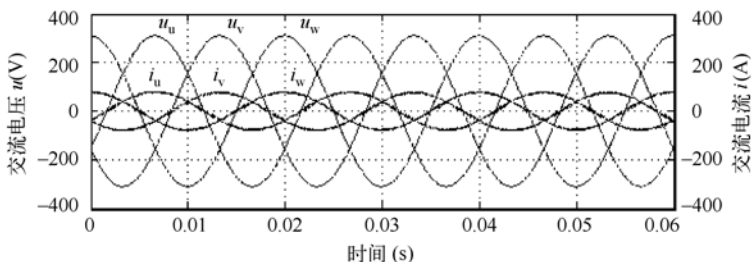
$f=50\text{Hz}$ 、电感 $L=16\text{mH}$ 、电阻 $R=0.3\Omega$ 、 $C=2200\mu\text{F}$ 、额定负载 $R_L=100\Omega$ 、调制频率 5kHz 及 $u_{\text{DCR}}=600\text{V}$ 。额定负载 $R_L=100\Omega$ 时变换器的工作状态如图 6.1.7 所示，由图 (a) 可以看出，直流输出电压稳定于给定电压 600V ，稳态误差 0.2V ，上升时间 460ms ；由图 (b) 可以看出， d 轴电流比直流电压先进入稳态， q 轴电流稳态时平均值为 0 ，功率因数 0.9995 ；由图 (c) 可以看出，稳态时交流电流同步，电流非常接近正弦波， $\text{THD}=3.4\%$ 。负载扰动时变换器的工作状态如图 6.1.8 所示，图中 A 为负载从 100Ω 变为 50Ω 的点， B 为负载从 50Ω 变为 100Ω 的点， C 为负载从 100Ω 变为 200Ω 的点， D 为负载从 200Ω 变为 100Ω 的点。由图 6.1.8 可以看出，在负载扰动时直流电压变化很小； d 、 q 电流在负载变化时产生短时波动快速进入稳态。



(a) 启动过程中的直流给定电压、直流电压



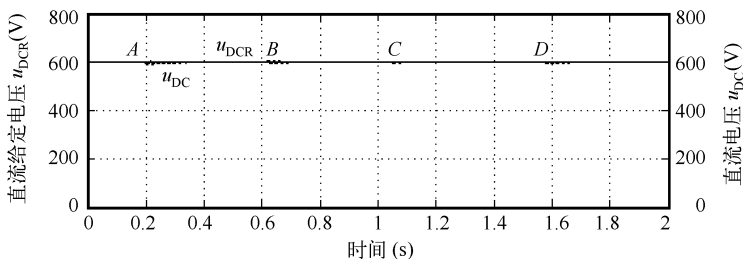
(b) 启动过程中的 d 轴电流、 q 轴电流



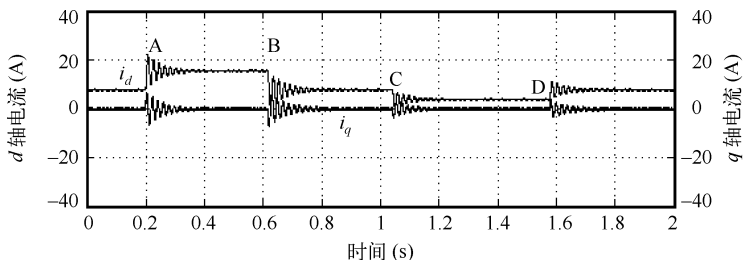
(c) 稳态时三相交流电压、电流

图 6.1.7 额定负载 $R_L=100\Omega$ 时变换器的工作状态

综上所述，基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM AC/DC 变换器控制策略 I 具有良好的静态性能和抗负载扰动能力，可实现电能“绿色变换”；其不足是变换器直流电压上升时间长。



(a) 负载扰动时的直流电压



(b) 负载扰动时的 d、q 轴电流

图 6.1.8 负载时变换器的工作状态

3. 基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM AC/DC 变换器控制策略 II

在控制策略 I 中，只进行了能量成形，没有注入阻尼，使系统响应变慢（如直流电压）。为使能量函数快速收敛到期望的平衡点，必须注入合适的阻尼。

(1) 控制器设计

整流器期望的平衡点如同控制策略 I。

重写方程 (6.1.23) 得

$$(\mathbf{J}_d - \mathcal{R}_d) \frac{\partial H_a}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{J}_a - \mathcal{R}_a) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g} \mathbf{u} = 0 \quad (6.1.34)$$

式中， $\mathbf{J}_d = \mathbf{J} + \mathbf{J}_a$, $\mathcal{R}_d = \mathcal{R} + \mathcal{R}_a$, $H_d = H + H_a$ 。

取 $\mathbf{J}_d = \mathbf{J}$, $\mathcal{R}_d = \mathcal{R} + \mathcal{R}_a$ (阻尼注入)，则式 (6.1.34) 变为

$$(\mathbf{J} - \mathcal{R}_d) \frac{\partial H_a}{\partial \mathbf{x}} - \mathcal{R}_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g} \mathbf{u} = 0 \quad (6.1.35)$$

取 $\mathcal{R}_a = \text{diag}(R_{a1}, R_{a2}, R_{a3})$ ，则有

$$\begin{pmatrix} 0 & S_d & S_q \\ -S_d & 0 & \omega L \\ -S_q & -\omega L & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{R_L} + R_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & R + R_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & R + R_{a3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{a3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ u_d \\ u_q \end{pmatrix} = 0 \quad (6.1.36)$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{R_L} + R_{a1}\right)k_1 + S_d k_2 + k_3 S_q - R_{a1} \frac{x_1}{C} = 0 \\ -S_d k_1 - (R + R_{a2})k_2 + \omega L k_3 - R_{a2} \frac{x_2}{L} - u_d = 0 \\ -S_q k_1 - \omega L k_2 - (R + R_{a3})k_3 - R_{a3} \frac{x_3}{L} - u_q = 0 \end{cases} \quad (6.1.37)$$

由式 (6.1.37) 中第二个、第三个方程可得

$$\begin{cases} S_d = \frac{-(R + R_{a2})k_2 + \omega L k_3 - R_{a2} \frac{x_2}{L} - u_d}{k_1} \\ S_q = \frac{-\omega L k_2 - (R + R_{a3})k_3 - R_{a3} \frac{x_3}{L} - u_q}{k_1} \end{cases} \quad (6.1.38)$$

将式 (6.1.38) 代入式 (6.1.37) 中第一个方程, 可得

$$\left(\frac{1}{R_L} + R_{a1}\right)k_1^2 + (R + R_{a2})k_2^2 + (R + R_{a3})k_3^2 + k_1 R_{a1} \frac{x_1}{C} + R_{a2} \frac{x_2}{L} k_2 + k_3 R_{a3} \frac{x_3}{L} + u_d k_2 = 0$$

取 $R_{a2} = R_{a3} = 0$, 则有

$$\left(\frac{1}{R_L} + R_{a1}\right)k_1^2 + R k_2^2 + R k_3^2 + k_1 R_{a1} \frac{x_1}{C} + u_d k_2 = 0 \quad (6.1.39)$$

同理, 为简化控制器设计, 设 $k_1(x)$ 、 $k_2(x)$ 、 $k_3(x)$ 均为 x_1 的函数, 根据可积性 (5.2.90) 有 $\frac{\partial k_1}{\partial x_2} = \frac{\partial k_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial k_1}{\partial x_3} = \frac{\partial k_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial k_2}{\partial x_3} = \frac{\partial k_3}{\partial x_2}$, 可得 $k_2 = A_2$, $k_3 = A_3$ 。

为实现在 $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ 处 H_d 有极值, 根据 $\frac{\partial H_d}{\partial x} = 0$ 可得

$$\begin{cases} \frac{x_1^*}{C} + k_1 = 0 \\ \frac{x_2^*}{L} + A_2 = 0 \\ \frac{x_3^*}{L} + A_3 = 0 \end{cases}$$

并考虑到 $u_d = \sqrt{\frac{3}{2}}U_m, u_q = 0$, $x_1^* = Cu_{\text{DCR}}, x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}}LI_m, x_3^* = 0$, 可得 $k_2 = A_2 = -\frac{x_2^*}{L} = -\sqrt{\frac{3}{2}}I_m$, $k_3 = 0$ 。则式 (6.1.39) 变为

$$\left(\frac{1}{R_L} + R_{a1}\right)k_1^2 + k_1R_{a1}\frac{x_1}{C} - \frac{3}{2}(U_mI_m - RI_m^2) = 0 \quad (6.1.40)$$

由式 (6.1.40) 可得

$$k_1 = \frac{-R_{a1}R_Lu_{\text{DC}} \pm \sqrt{(R_{a1}u_{\text{DC}}R_L)^2 + 4(1 + R_LR_{a1})u_{\text{DCR}}^2}}{2(1 + R_{a1}R_L)} \quad (6.1.41)$$

可以证明由 k_1 、 k_2 、 k_3 确定的 H_a 能够保证 H_d 在 x^* 为最小值。

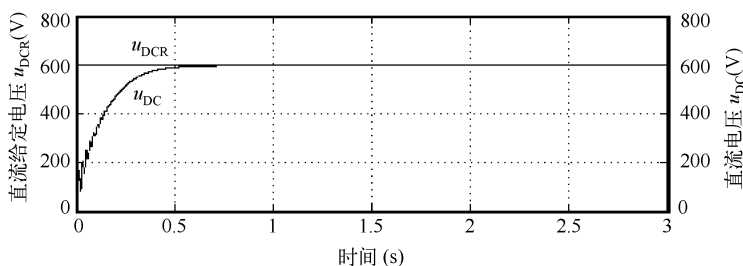
由式 (6.1.38)、式 (6.1.41) 可得变换器无源控制律

$$\begin{cases} S_d = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(RI_m - U_m)}{k_1} \\ S_q = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega LI_m}{k_1} \end{cases} \quad (6.1.42)$$

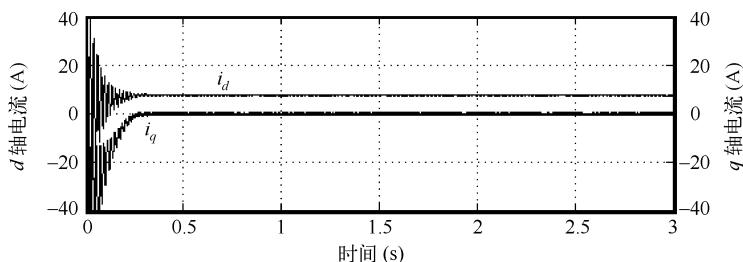
(2) 系统仿真研究

系统仿真参数如同控制策略 I。

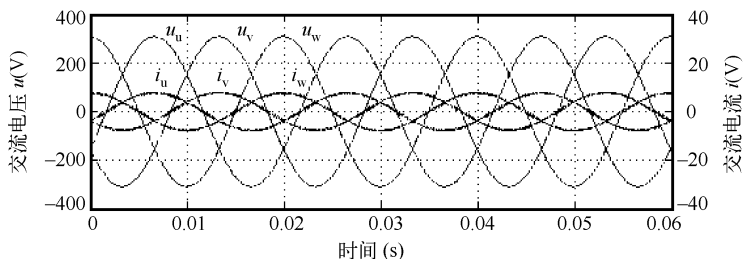
额定负载 $R_L=100\Omega$, $R_a=50\Omega$ 时变换器的工作状态如图 6.1.9 所示, 由图 (a) 可以看出, 直流输出电压稳定于给定电压 600V, 稳态误差 0.1V, 上升时间 350ms; 由图 (b) 可以看出, d 轴电流比直流电压先进入稳态, d 轴电流和 q 轴电流快速进入稳态, 同样 q 轴电流稳态时平均值为 0, 功率因数为 1; 由图 (c) 可以看出, 稳态时交流电流同步, 电流非常接近正弦波, $\text{THD}=3.3\%$ 。负载扰动时整流器的工作状态如图 6.1.10 所示, 图中 A 为负载从 100Ω 变为 50Ω 的点, B 为负载从 50Ω 变为 100Ω 的点, C 为负载从 100Ω 变为 200Ω 的点, D 为负载从 200Ω 变为 100Ω 的点。由图 6.1.10 可以看出, 在负载扰动时直流电压变化很小; d 、 q 电流在负载变化时产生短时波动快速进入稳态。



(a) 启动过程中的直流给定电压、直流电压

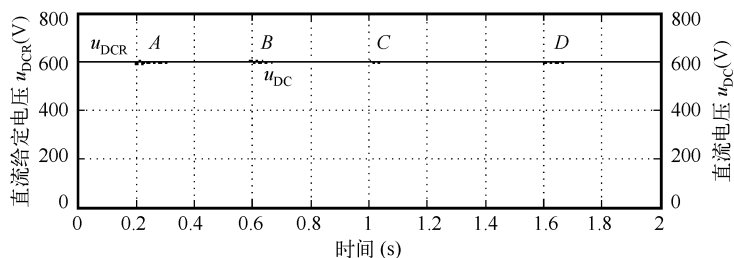


(b) 启动过程中的 d 轴电流、 q 轴电流



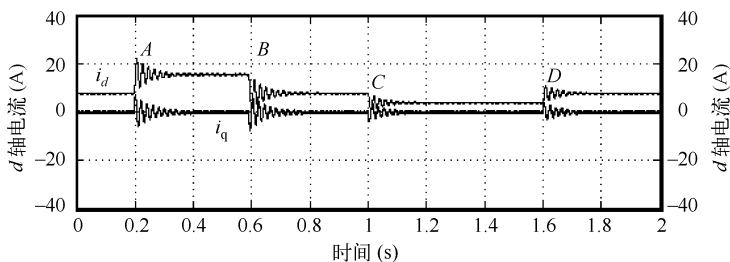
(c) 稳态时三相交流电压、电流

图 6.1.9 额定负载 $R_L=100\Omega$ 变换器的工作状态



(a) 负载扰动时的直流电压

图 6.1.10 负载时变换器的工作状态



(b) 负载扰动时的 d 、 q 轴电流

图 6.1.10 负载时变换器的工作状态 (续)

综上可知, 基于 PCHD 模型的三相电压型 PWM AC/DC 变换器控制策略 II 比控制策略 I 具有更好的动、静态性能和抗负载扰动能力, 可实现电能“绿色变换”。

另外, 参考文献[57]中对于三相电压型 PWM AC/DC 变换器设计了一个算法简单且无静差的 IDA-PB 控制器, 并改进了 IDA-PB 控制算法, 使改进后的闭环控制器减小了对系统参数的依赖, 增强了系统的鲁棒性, 读者可参考。

6.2 无源控制理论在 DC/DC 变换器中的应用

PWM 型 DC/DC 变换器在电能变换中起到重要作用, 日益受到人们的关注。为提高 DC/DC 变换器的性能, 国内学者已将无源控制理论用于变换器控制器设计中。对于 boost 型 DC/DC 变换器无源控制器设计在 5.2 节例子中已进行了论述, 本节主要介绍 buck 型 DC/DC 变换器无源控制器设计方法。

6.2.1 基于反馈无源化的 Buck 型 DC/DC 变换器无源控制^[58]

1. Buck 型 DC/DC 变换器数学模型

Buck 型 DC/DC 变换器电路如图 6.2.1 所示。

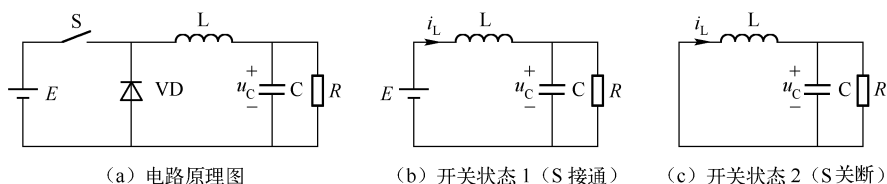


图 6.2.1 Buck 变换器工作原理及其工作模式

图 6.2.1 中, 开关 S 和二极管 VD 以互补的方式导通。电感中的电流始终不为 0, 这种工作模式叫做电流连续模式 (CCM)。Buck 型 DC/DC 变换器工作原理见参考文献[59]。

控制输入函数 $u(t)$ 是开关函数为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_k + dT \\ 0, & t_k + dT \leq t < t_k + T \end{cases} \quad t_k + T = t_{k+1}, k = 0, 1, \dots \quad (6.2.1)$$

式中, T 为采样周期; d 为占空比, 且 $0 < d < 1$; t_k 为采样时间。 d 决定了 Δt_k 的宽度 ($\Delta t_k = dT$), 因此反馈系统通过调节占空比 d 即可实现对 Buck 型 DC/DC 变换器的控制。

根据图 6.2.1 可得变换器的仿射非线性模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{L} \\ \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} \quad (6.2.2)$$

式中, $x_1 = i_L$, $x_2 = u_C$ 。

令控制输入为

$$u = u_1 + u_r \quad (6.2.3)$$

式中, u_r 为参考输入。则式 (6.2.2) 变为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u_1 + g(x)u_r = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{L} \\ \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u_r \\ y = h(x) = x_1 \end{cases}$$

由于 $L_g h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, 则系统的相对阶 $\gamma = 1$ 。

为把仿射非线性模型转换为链式结构标准型, 引入变换 $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x) \\ h(x) \end{pmatrix}$ 。由于系统相对阶为 1, 所以使变换满足 $L_g z(x) = 0$, 则有

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x} g(x) = \left(\frac{\partial z(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z(x)}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

于是有

$$\frac{E}{L} \frac{\partial z(x)}{\partial x_1} = 0 \quad (6.2.4)$$

式 (6.2.4) 的一个解为

$$z(x) = x_2 \quad (6.2.5)$$

综上所述可得

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \\ \dot{y} = \dot{x}_1 = -\frac{1}{L}x_2 + \frac{E}{L}u_1 = -\frac{1}{L}z + \frac{E}{L}u_1 \end{cases} \quad (6.2.6)$$

取反馈控制律

$$u_1 = \frac{1}{E}(Lv + z) \quad (6.2.7)$$

可得链式结构标准型

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{1}{RC}z + \frac{1}{C}y \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (6.2.8)$$

2. Buck 型 DC/DC 变换器无源控制器设计

假设存在适当的函数 $\beta(z)$ 使得 $y = \beta(z)$ 时, 子系统 (6.2.8) 在 $z = 0$ 是渐进稳定的。令 $y = \beta(z) = -z$, 则 $\dot{z} = -\frac{R+1}{RC}z$, 存在正定函数 $W = \frac{1}{2}z^2$, 使得 $\dot{W} = z\dot{z} = -\frac{R+1}{RC}z^2 < 0$ 。因此, 系统满足无源化条件。

对系统 (6.2.8) 选取新的输出信号 $\tilde{y} = y - \beta(z)$, 则

$$y = \tilde{y} + \beta(z) = \tilde{y} - z \quad (6.2.9)$$

并对该系统实施如下坐标变换 $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, 则系统 (6.2.8) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{1}{RC}z + \frac{1}{C}(\tilde{y} - z) \\ \dot{\tilde{y}} = v - \dot{\beta}(z) \end{cases} \quad (6.2.10)$$

令反馈输入

$$v = \dot{\beta}(z) + \tilde{v} = \frac{\partial \beta}{\partial z} \dot{z} + \tilde{v}_0 \quad (6.2.11)$$

式中, \tilde{v}_0 为辅助输入信号。于是式 (6.2.10) 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{1}{RC}z + \frac{1}{C}(\tilde{y} - z) \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{v}_0 \end{cases} \quad (6.2.12)$$

因为 \tilde{y} 满足零状态可检测条件, 则该系统具有最小相位特性, 将式 (6.2.10) 分解为

$$\dot{z} = -\frac{1}{RC}(1+R)z + \frac{1}{C}\tilde{y} \quad (6.2.13)$$

$$\text{则} \quad f_0^* = -\frac{1}{RC}(1+R)z \quad \tilde{f} = \frac{1}{C}z \quad (6.2.14)$$

得到无源反馈控制律为

$$\tilde{v} = -\frac{\partial W}{\partial z}\tilde{f} + v' = -\frac{1}{C}z + v' \quad (6.2.15)$$

此时闭环系统对应的存储函数为

$$H(z, \tilde{y}) = W(z) + \frac{1}{2}\tilde{y}^2 \quad (6.2.16)$$

令 $v' = -\tilde{y}_0$ 并代入 (6.2.15) 得

$$\tilde{v} = -\frac{1}{C}z + \tilde{y}_0 \quad (6.2.17)$$

由式 (6.2.11) 得

$$v = -\dot{z} + \tilde{v} = \left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{C} - 1\right)z - \left(\frac{1}{C} + 1\right)y \quad (6.2.18)$$

将式 (6.2.18) 代入式 (6.2.7) 得

$$u_1 = \frac{1}{E}(Lv + z) = \frac{1}{E}\left[L\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{C} - 1 + \frac{1}{L}\right)z - L\left(\frac{1}{C} + 1\right)y\right] \quad (6.2.19)$$

将 $z = x_2$, $y = x_1$ 代入式 (6.2.19) 得

$$u_1 = \frac{1}{E}\left[L\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{C} - 1 + \frac{1}{L}\right)x_2 - L\left(\frac{1}{C} + 1\right)x_1\right] \quad (6.2.20)$$

将式 (6.2.20) 代入式 (6.2.3) 得变换器无源控制律为

$$u = \frac{1}{E}\left[L\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{C} - 1 + \frac{1}{L}\right)x_2 - L\left(\frac{1}{C} + 1\right)x_1\right] + u_r \quad (6.2.21)$$

当变换器的参数为 $C = 20\mu\text{F}$, $R = 20\Omega$, $L = 1\text{mH}$, $E = 48\text{V}$, 期望输出电压 24V , 开关频率为 100kHz 时, 无负载扰动情况下的输出电压和电流波形如图 6.2.2 所示。

当电阻 (电阻分别在 $t = 0.003\text{s}$ 和 $t = 0.007\text{s}$ 时刻在 20Ω 和 15Ω 之间跳变) 如

图 6.2.3 所示。跳变时，有负载突变情况下输出电压和电流波形如图 6.2.4 所示。

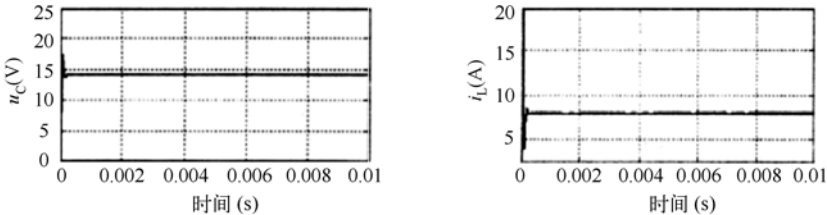


图 6.2.2 无负载扰动时输出电压和电流波形

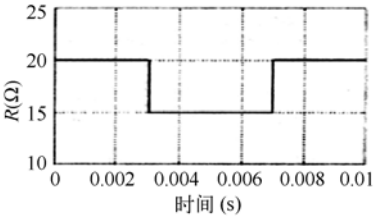


图 6.2.3 负载电阻变化曲线

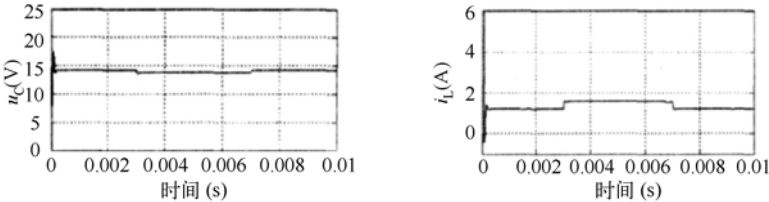


图 6.2.4 负载突变时输出电压和电流波形

采用 PWM 调制时，无负载扰动情况下输出电压和电流波形如图 6.2.5 所示。

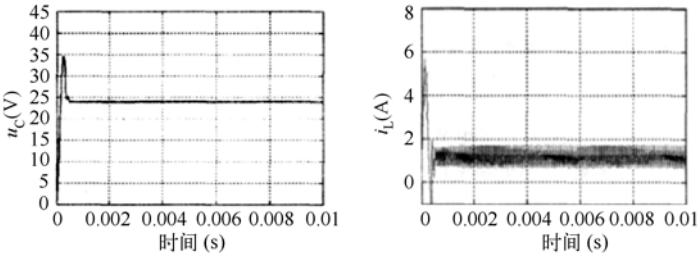


图 6.2.5 无负载扰动时 PWM 调制的状态曲线图

采用 PWM 无源化控制时，有负载突变情况下输出电压和电流波形如图 6.2.6

所示（电阻跳变情况见图 6.2.3）。

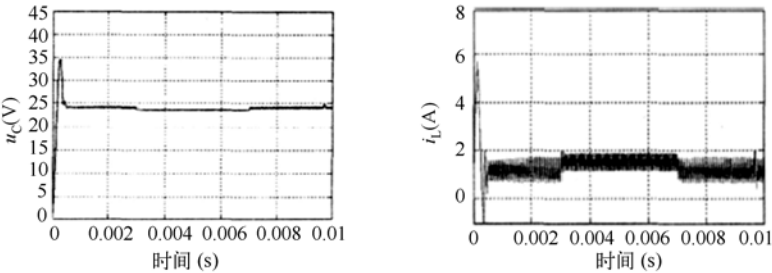


图 6.2.6 负载扰动时 PWM 调制的状态曲线图

由以上各图可见，采用无源化控制策略得到的状态响应曲线在很短的时间内趋于稳定，响应速度快，超调量小，对负载扰动也有很强的鲁棒性。

6.2.2 基于 EL 方程的 Buck 型 DC/DC 变换器无源控制^[60, 61]

1. Buck 型 DC/DC 变换器 EL 数学模型

Buck 型 DC/DC 变换器主电路见图 6.2.1 (a)，电感电荷用 q_L 表示，电容电荷用 q_C 表示，则 \dot{q}_L 为电感电流， q_C/C 为电容电压。在连续导通模式 (CCM) 情况下，选择电感电流和电容电压为状态变量，即 $z_1 = \dot{q}_L$ 和 $z_2 = q_C/C$ ，根据图 6.2.1 (a) 可得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{1}{L}z_2 + \frac{E}{L}u \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 \end{cases} \tag{6.2.22}$$

式中， u 为电力电子开关 S 的占空比， $0 \leq u \leq 1$ 。

以矩阵的形式将式 (6.2.22) 表示为

$$D\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{u}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.2.23}$$

$$\text{式中， } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}。$$

式 (6.2.2) 就为 Buck 型 DC/DC 变换器 EL 数学模型。

2. Buck 型 DC/DC 变换器无源控制器设计

无源控制器设计采用能量成形及阻尼注入方法。假设期望的状态向量为 $\mathbf{z}^* = (z_1^*(t) \ z_2^*(t))^T$ ， $z_1^*(t)$ 、 $z_2^*(t)$ 满足式 (6.2.23)。设状态向量误差 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*$ ，

则根据式 (6.2.23) 可得变换器误差动态方程为

$$D\dot{e}(t) + Je(t) + Re(t) = u\varepsilon - [D\dot{z}^*(t) + Jz^*(t) + Rz^*(t)] \quad (6.2.24)$$

取误差能量函数 $H_e = \frac{1}{2} e^T(t) De(t)$, 为加速 H_e 快速收敛到 0, 在式 (6.2.24) 两端添加阻尼耗散项 $R_i e(t)$, R_i 为

$$R_i = \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_i > 0 \quad (6.2.25)$$

当
$$u\varepsilon = [D\dot{z}^*(t) + Jz^*(t) + Rz^*(t)] - R_i e(t) \quad (6.2.26)$$

时, 可得

$$D\dot{e}(t) + Je(t) + (R + R_i)e(t) = 0 \quad (6.2.27)$$

求 H_e 对时间的导数为

$$\dot{H}_e = e^T(t) D\dot{e}(t) = e^T(t) [-Je(t) - (R + R_i)e(t)] = -e^T(t) (R + R_i)e(t) < 0 \quad (6.2.28)$$

把式 (6.2.26) 展开得

$$\begin{cases} uE = L\dot{z}_1^* + z_2^* - R_i(z_1 - z_1^*) \\ 0 = C\dot{z}_2^* - z_1^* + \frac{z_{2d}}{R} \end{cases} \quad (6.2.29)$$

即可根据式 (6.2.29) 设计变换器无源电流控制器。

(1) 静态无源电流控制器设计

采用静态无源电流控制器变换器控制结构如图 6.2.7 (a) 所示, R_1 为恒定电阻, R_1 上电压为反馈电压 u_{FB} , 利用 u_{FB} 调解电容电压到期望值 (z_2^*), 与 z_2^* 对应的 u_{FB} 为 u_{FBD} 。期望输出电流由 u_{FBD} / R_1 决定。

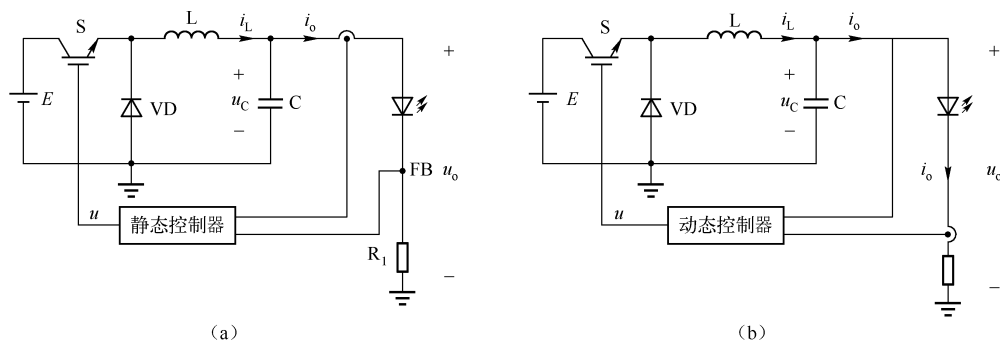


图 6.2.7 Buck 型 DC/DC 变换器的无源电流控制器

假设期望电容电压 $z_2^* = U_D$ ，根据式 (6.2.29) 可得

$$u = \frac{U_D}{E} - \frac{R_i}{E} \left(z_1 - \frac{U_D}{R} \right) \quad (6.2.30)$$

由于

$$\frac{z_2}{R} = \frac{u_{FB}}{R_i} \quad (6.2.31)$$

期望的反馈电压为 u_{FBD} ，根据式 (6.2.30) 和式 (6.2.31) 可得

$$u = \frac{u_{FBD} R}{E R_i} - \frac{R_i}{E} \left(z_1 - \frac{u_{FBD}}{R_i} \right) \quad (6.2.32)$$

式 (6.2.32) 为静态反馈控制器的占空比函数的合成器。

(2) 动态无源电流控制器设计

图 6.2.7 (b) 中动态控制器直接将输出电感电流调节到期望的平衡电流 $z_1^* = I_D$ ，将 $z_1^* = I_D$ 代入式 (6.2.8) 中第一个方程，可得

$$z_2^*(t) = u(t)E + R_i(z_1 - I_D) \quad (6.2.33)$$

将式 (6.2.33) 代入式 (6.2.29) 中第二个方程，则得动态反馈占空比合成器的表达式为

$$\dot{u} = \frac{1}{RCE} [(I_D R - uE) - R_i(z_1 - I_D)] + \frac{R_i}{LE} (z_2 - uE) \quad (6.2.34)$$

(3) 无源电流控制器仿真研究

Buck 变换器参数为 $E=12V$ ， $L=10\mu H$ ， $C=40\mu F$ ， $R=3\Omega$ ，开关频率为 $1.6MHz$ 。在 $R_i=0.5\Omega$ 、 2Ω 、 5Ω 时，对变换器的启动特性、线暂态响应 ($E=12V$ ， $t \in [10\mu s, 3ms]$ ； $E=15V$ ， $t \in [3.001ms, 5ms]$ ； $E=10V$ ， $t \in [5.001ms, 10ms]$) 及负载暂态响应 ($R=3\Omega$ ， $t \in [0, 7ms]$ ； $R=1\Omega$ ， $t \in [7.001ms, 9ms]$ ； $R=3\Omega$ ， $t \in [9.001ms, 10ms]$) 进行仿真研究。

为确保占空比函数值不超过物理界 $[0, 1]$ ，需加限制器。期望输出电流设为 $I_d=3A$ 。在静态控制器中恒值电阻设为 $R_i=0.1\Omega$ 。图 6.2.8 示出了由静态控制器（点线）和动态控制器（实线）控制的调节器启动特性。由图 6.2.8 可知，采用动态控制器产生很大的超调，该超调可损坏负载。幸运的是，启动超调问题可使用软启动方案（在 $100\mu s$ 内输出电流逐渐增加到期望的平衡电流）得到缓解。图 6.2.9、图 6.2.10、图 6.2.11 分别示出了软启动调节器启动波形、静态控制器时的线暂态响应和负载暂态响应；图 6.2.12、图 6.2.13 分别示出了动态控制器时的线暂态响应和负载暂态响应。从图 6.2.9～图 6.2.13 可以看出，采用动态控制器时，具有较小的负载暂态超调；但比采用静态控制器时有较高的线暂态超调；反之亦然。采用动态控制器与静态控制器相比，具有较小的负载暂态超调和更快的负载响应。因此，动态

控制器的调节器的性能优于具有软启动（用于抑制启动超调）的静态控制器性能。

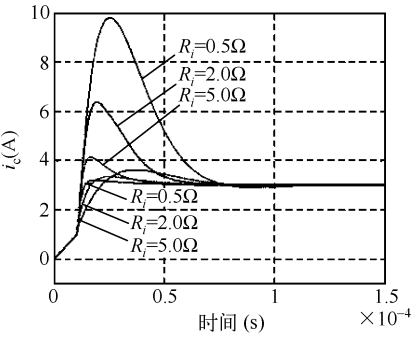


图 6.2.8 由静态控制器和动态控制器控制的调节器启动特性

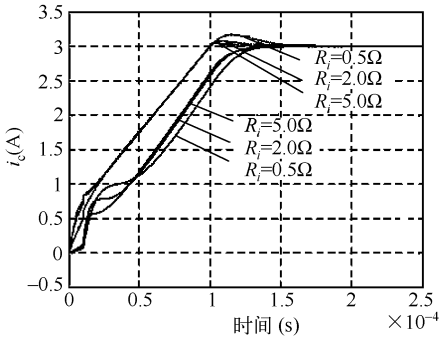


图 6.2.9 软启动调节器启动波形

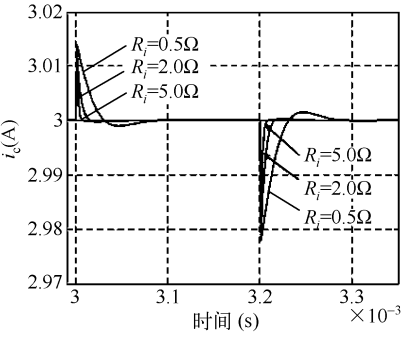


图 6.2.10 静态控制器控制时的线暂态响应

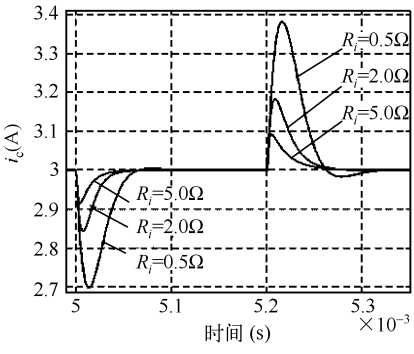


图 6.2.11 静态控制器控制时的负载暂态响应

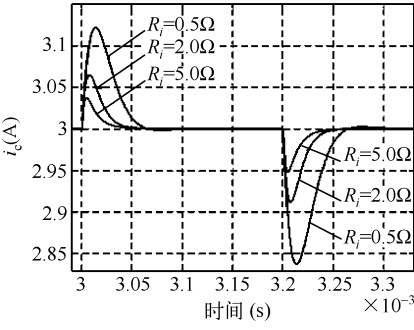


图 6.2.12 动态控制器控制时的线暂态响应

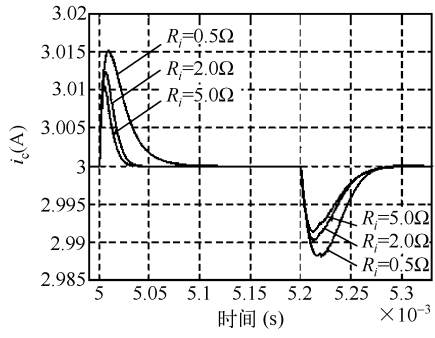


图 6.2.13 动态控制器控制时的负载暂态响应

此外，所有的上述仿真结果表明静态和动态无源电流调节器都能将功率变换器

的输出电流调节在期望的平衡值附近，且对突然的线突变及负载突变具有较强的鲁棒性。阻尼注入比对控制器的调节能力影响很大，较小的阻尼注入比降低了线/负载暂态响应，增大了暂态过调，因此，应选择合适的阻尼注入实现对控制器调节能力的优化。

为提高 Buck 变换器抑制混沌行为的能力，参考文献[62]中基于时间延迟反馈近似思想，提出一类无源反馈控制方法，实现了电压模式 Buck 变换器的混沌控制。采用数据采样方式建立了被控系统的迭代映射方程，利用数值计算确定出无源反馈控制强度的调节范围。此无源控制策略可以有效实现系统混沌行为的抑制，拓宽了输入电压的稳定范围，减小了电压和电流纹波。

6.3 无源控制理论在电力补偿器中的应用

随着电能需求量的增加，电力系统规模越来越大，电网结构日益复杂和庞大，使得稳定性问题极为突出。改善与提高电力系统稳定性的主要手段是控制，利用静止无功补偿器 SVC (Static Var Compensator) 来改善电网的电压质量和提高电网运行稳定性，已获得较为广泛的应用。在电网中发生突发变化或较大扰动时，PBC 控制器比 PI 控制器更快动作，有效抑制电网中的扰动，使其尽快恢复正常状况，能对无功功率进行更好的补偿，有更佳的稳定性^[63]。因此，采用无源控制理论研究静止无功补偿器是提高其性能的有效途径。

6.3.1 基于 EL 模型的静止无功补偿器无源控制^[64, 65]

先进静止无功发生器 ASVG (Advanced Static Var Generator) 由于其稳定特性和运行特性，在无功功率（电流）补偿和电压支撑中起着更重要的作用。在 ASVG 和电力系统之间的有功和无功交换是由 ASVG 和电力系统之间的感抗电压差所引起的。ASVG 的第一个基本功能是用交流电压控制器控制线电压以调节 ASVG 和电力系统之间的无功功率交换；第二个基本功能是用直流电压控制器调节 ASVG 直流侧电容上的电压。

1. 静止无功补偿器 EL 模型

ASVG 电路如图 6.3.1 所示，C 表示直流侧电容，R 和 L 分别表示等效电阻和等效电感，输入的线电压、线电流分别为 u_k 、 i_k ($k=u,v,w$)，双极性开关函数用 p_k 表示

$$p_k = \begin{cases} 1 & S_k \text{ 闭合, } \bar{S}_k \text{ 断开} \\ -1 & S_k \text{ 断开, } \bar{S}_k \text{ 闭合} \end{cases} \tag{6.3.1}$$

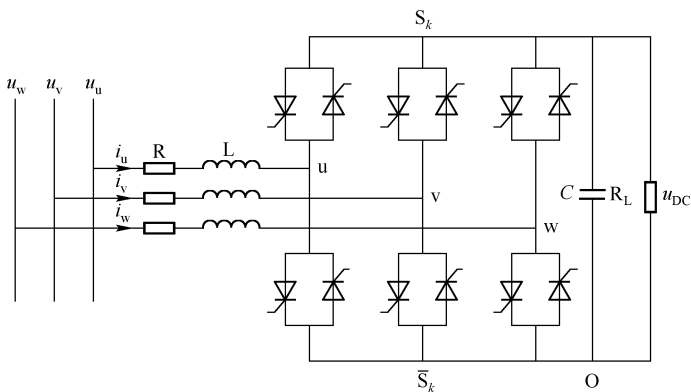


图 6.3.1 ASVG 电路

假设三相平衡，根据图 6.3.1 和式 (6.3.1) 可得

$$\begin{cases} u_{uo} = \frac{1}{2}(1 + p_u)u_{DC} \\ u_{vo} = \frac{1}{2}(1 + p_v)u_{DC} \\ u_{wo} = \frac{1}{2}(1 + p_w)u_{DC} \end{cases} \quad (6.3.2)$$

于是，根据图 6.3.1 和式 (6.3.2) 可得

$$\begin{cases} L \frac{di_u}{dt} + Ri_u + \frac{1}{2}p_u u_{DC} = u_u \\ L \frac{di_v}{dt} + Ri_v + \frac{1}{2}p_v u_{DC} = u_v \\ L \frac{di_w}{dt} + Ri_w + \frac{1}{2}p_w u_{DC} = u_w \\ C \frac{du_{DC}}{dt} - \frac{1}{2}(p_u i_u + p_v i_v + p_w i_w) + \frac{u_{DC}}{R_L} = 0 \end{cases} \quad (6.3.3)$$

采用等量 dq 同步旋转变换，可得

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \\ \frac{du_{DC}}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega L & \frac{1}{2}p_d \\ -\omega L & 0 & \frac{1}{2}p_q \\ -\frac{1}{2}p_d & -\frac{1}{2}p_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 2/3R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ u_{DC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

式中, ω 为电源角频率, U_m 为电源相电压幅值。

式 (6.3.4) 可简写成 EL 的形式

$$M\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathcal{R}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (6.3.5)$$

2. 静止无功补偿器控制器设计

无功补偿器是要控制交流电压和直流电压。目标是通过调节输入线电流获得输出电压跟踪。设状态误差为 $\mathbf{x}_e = (i_d - i_d^* \quad i_q - i_q^* \quad u_{DC} - u_{DCR})^T$, 根据式 (6.3.5) 可得误差动态方程为

$$M\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{J}\mathbf{x}_e + \mathcal{R}\mathbf{x}_e = \mathbf{u} - (M\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x}^* + \mathcal{R}\mathbf{x}^*) \quad (6.3.6)$$

为加速系统响应, 取期望的阻尼耗散项为

$$\mathcal{R}_d \mathbf{x}_e = (\mathcal{R} + \mathcal{R}_a) \mathbf{x}_e \quad (6.3.7)$$

$$\text{式中, } \mathcal{R}_a = \begin{pmatrix} R_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{a3} \end{pmatrix}。$$

将式 (6.3.7) 代入式 (6.3.6) 得

$$M\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{J}\mathbf{x}_e + \mathcal{R}\mathbf{x}_e = \mathbf{u} - (M\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x}^* + \mathcal{R}\mathbf{x}^* - \mathcal{R}_a \mathbf{x}_e) \quad (6.3.8)$$

为获得期望的误差动态性能, 取

$$\mathbf{u} = M\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x}^* + \mathcal{R}\mathbf{x}^* - \mathcal{R}_a \mathbf{x}_e \quad (6.3.9)$$

由式 (6.3.9) 可得

$$\begin{cases} Li_d^* + Ri_d^* + \omega Li_q^* + \frac{1}{2}u_{DCR}p_d - R_{a1}(i_d - i_d^*) = U_m \\ Li_q^* + Ri_q^* - \omega Li_d^* + \frac{1}{2}u_{DCR}p_q - R_{a2}(i_q - i_q^*) = 0 \\ \frac{2}{3}Cu_{DCR} - \frac{1}{2}(i_d^*p_d + i_q^*p_q) + \frac{2}{3}\frac{u_{DCR}}{R_L} - R_{a3}(u_{DC} - u_{DCR}) = 0 \end{cases} \quad (6.3.10)$$

在无功补偿器控制中, 通过调节输入线电流改变交流和直流母线电压, 则目标是把 i_d 调节到 i_d^* 、 i_q 调节到 i_q^* 。从式 (6.3.10) 中前两个方程可得控制变量 ($\dot{i}_d^* = 0$, $\dot{i}_q^* = 0$)

$$\begin{cases} p_d = \frac{2}{u_{DCR}}[-Ri_d^* - \omega Li_q^* + R_{a1}(i_d - i_d^*) + U_m] \\ p_q = \frac{2}{u_{DCR}}(-Ri_q^* + \omega Li_d^* + R_{a2}(i_d - i_d^*)) \end{cases} \quad (6.3.11)$$

把式 (6.3.11) 代入式 (6.3.10) 的第三个方程可得控制律

$$\begin{aligned} \dot{i}_{\text{DCR}} = & \frac{3i_d^*}{2Cu_{\text{DCR}}} \left[-\omega Li_q^* - Ri_d^* + R_{a1}(i_d - i_d^*) + U_m \right] + \\ & \frac{3i_q^*}{2Cu_{\text{DCR}}} \left[\omega Li_d^* - Ri_q^* + R_{a2}(i_q - i_q^*) \right] - \frac{u_{\text{DCR}}}{R_L C} \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

传统上讲, 期望电流指令是由补偿器模型 (6.3.4) 预先确定的。然而, 在电力系统中寄生元件及参数不精确 (尤其是在大扰动情况下), 可能导致直流母线电压的不正确和引起稳态误差。为获得好的跟踪性能及强的鲁棒性, 用古典的 PI 控制器调节 d 、 q 轴电流指令 i_d^* 和 i_q^* 。所提方案的控制框图如图 6.3.2 所示, 图中的 U_{mD} 为交流电源给定电压。自此以后, 上述提及的无源控制技术容易用到设计补偿器控制器。

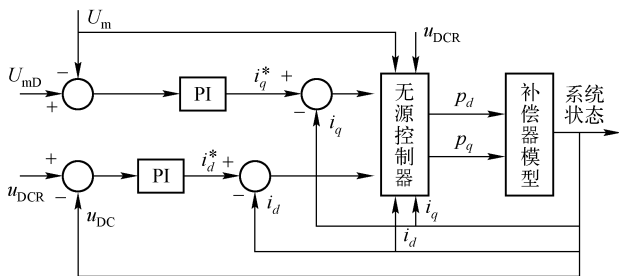


图 6.3.2 带有 PI 控制器的补偿器控制器框图

3. 仿真研究

这里将前面所提方案在 PSCAD/EMTDC 中实现 STATCOM 控制器, 并进行仿真。图 6.3.3 示出了用于进行 STATCOM 动态建模和分析的系统原理图。所研究的系统包括 115kV 三相传输系统, 可以认为是连接变负载的无限大电源母线系统。在负载点连接基于 STATCOM 的两电平 VSC, 用于提供瞬时电压支撑。直流侧的 300μF 电容提供 STATCOM 能量存储。在模型中, 开关损失由分流直流电阻 $R_L = 50\Omega$ 考虑。断路器控制二次负载与系统的连接。所研究系统的参数见表 6.3.1。在本例中, STATCOM 的目标是在负载点提供电压调节和在负载增加时抑制电压下跌。该系统考虑运行于平衡条件下且两个负载是线性的。STATCOM 结构是简单的二电平 VSI, 并由所提方案控制。

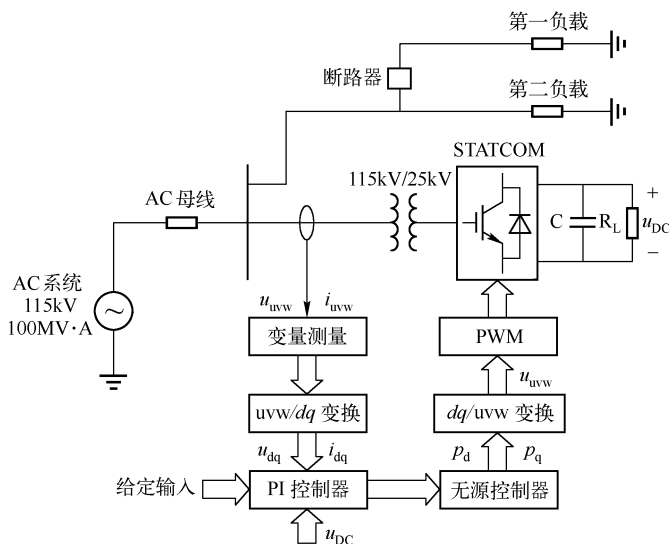


图 6.3.3 补偿器系统原理图

表 6.3.1 系统参数

交流电源电压 U_m	115kV
交流侧电阻 R	0.5Ω
交流侧电感 L	20mH
直流侧电容 C	300 μ F
直流侧电阻 R_L	50 Ω
电源频率 ω	314rad/s

直流母线 PI 调节器参数： $K_{pd} = 0.01$ ， $K_{id} = 0.3$ ；交流母线 PI 调节器参数： $K_{pq} = 3$ ， $K_{iq} = 10$ 。

仿真是在 PSCAD 环境下进行的。仿真结果证明非线性 STATCOM 控制器在负载点负载增加时能提供电压调节和无功功率补偿。在仿真间隔 0.8~1.2s 内，由闭合断路器增加一次负载。在这种运行条件下，在负载点的电压经历了电压下跌，注入 d 、 q 轴参考电流调节母线电压，如图 6.3.4 所示，由图可看到快速 d 、 q 轴参考电流指令。图 6.3.5 示出了运行中 STATCOM 负载点的电压，可以看出电压下跌非常小。图 6.3.6 描绘了直流侧电容电压。当 STATCOM 满负荷运行时，直流电压大

约增加 44 kV。直流电压也有良好的动态性能，过调及欠调都比较小。在仿真间隔 0.8~1.2s 内，STATCOM 从交流系统吸收有功功率给电容充电，以维持所需的直流电压。图 6.3.7 示出了在交流系统和补偿器之间无功功率的迅速交换，由此可见，所提的 STATCOM 控制器在 0.8~1.2s 期间可迅速改善扰动。因此，在大的扰动情况下，所提的鲁棒 STATCOM 控制器性能仍是良好的。

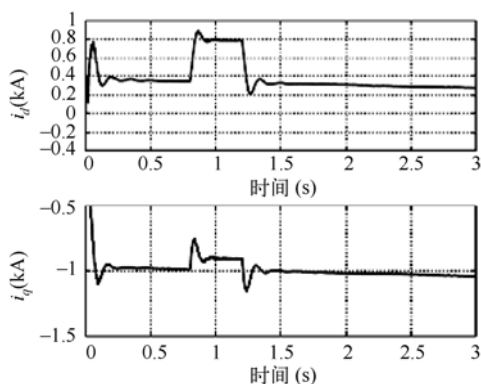


图 6.3.4 d、q 轴参考电流瞬态响应

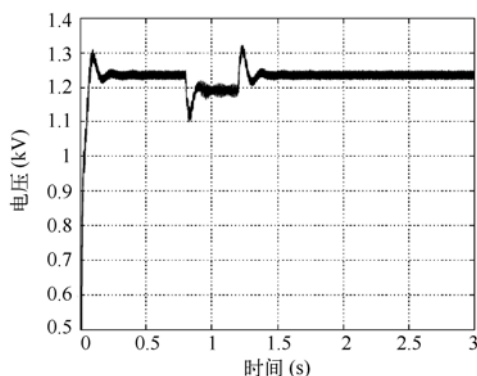


图 6.3.5 交流母线电压瞬态响应

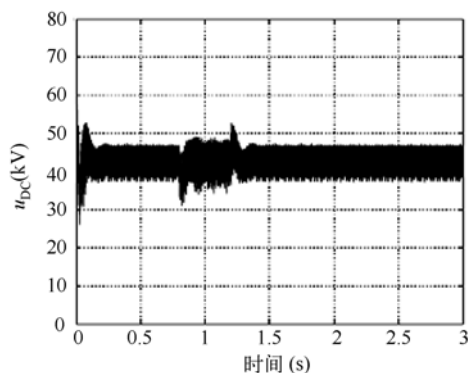


图 6.3.6 直流电压 u_{DC} 的瞬态响应

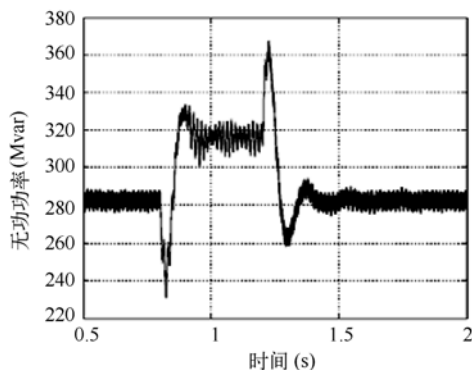


图 6.3.7 无功功率的瞬态响应

6.3.2 基于 PCHD 模型的静止无功补偿器无源控制

下面介绍基于哈密顿能量函数含 SVC 的电力系统无源控制策略。研究目标是装入 FC-TCR (Fixed Capacitor-Thyristor Controlled Reactor) 型 SVC 的单机无穷大系统^[66]。

1. 单机无穷大系统数学模型

考虑单机无穷大系统，在输电线路中间，装入 FC-TCR 型 SVC，其原理图和相应的等效电路图如图 6.3.8 (a)、(b) 所示。

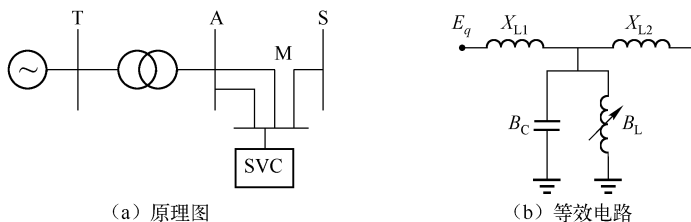


图 6.3.8 具有 SVC 的单机无穷大系统图

为了建模，首先做适当假设：① 发电机的机械功率 P_m 在暂态过程中保持不变，即 $P_m = \text{const}$ ；② 略去定子回路和网络的瞬变过程；③ 阻尼绕组在阻尼系数中计及，同时引入外部干扰。则具有 SVC 的单机无穷大系统的非线性方程为

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega - \omega_0 \\ \dot{\omega} = \frac{\omega_0}{M} P_m - \frac{D}{M} (\omega - \omega_0) - \frac{\omega_0 V_s}{M} \frac{E'_q \sin \delta}{x_{L1} + x_{L2} + x_{L1} x_{L2} B_{\text{SVC}}} \\ \dot{E}'_q = -\frac{1}{T'_d} E'_q + \frac{(x_d - x'_d) V_s}{T_{d0}} \frac{\cos \delta}{x_{L1} + x_{L2} + x_{L1} x_{L2} B_{\text{SVC}}} + \frac{1}{T_{d0}} V_f \end{cases} \quad (6.3.13)$$

式中， δ 为发电机转子运行角 (rad)； ω 为发电机转子角速度 (rad/s)， $\omega_0 = 2\pi f_0$ ； E'_q 为 q 轴内部暂态电压 (标么值)； M 为发电机的惯性时间常数 (s)； P_m 为机械功率 (标么值)； D 为发电机阻尼系数； x_d 为 d 轴绕组自感抗 (标么值)； x'_d 为 d 轴绕组暂态电抗 (标么值)； T_{d0} 为励磁电路时间常数 (s)； T'_d 为定子闭路时的励磁绕组时间常数； V_f 为发电机励磁电路电压控制变量 (标么值)； V_s 为无穷大机组电压； x_{L1} 和 x_{L2} 的含义见图 6.3.8。

选择控制变量

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{x_{L1} + x_{L2} + x_{L1} x_{L2} B_{\text{SVC}}} \\ u_2 = V_f \end{cases} \quad (6.3.14)$$

令 $x_1 = \delta$ ， $x_2 = \omega - \omega_0$ ， $x_3 = E'_q$ ，则式 (6.3.13) 可转化成仿射非线性的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6.3.15)$$

式中, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a + bx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cx_3 \sin x_1 & 0 \\ e \cos x_1 & h \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; $a = \frac{\omega_0}{M} P_m$, $b = -\frac{D}{M}$,
 $c = -\frac{\omega_0 V_s}{M}$, $d = -\frac{1}{T_d'}$, $e = \frac{(x_d - x_d') V_s}{T_{d0}}$, $h = \frac{1}{T_{d0}}$ 。

2. 控制器设计

考察端口受控耗散哈密顿系统(PCHD)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (6.3.16)$$

若式 (6.3.16) 是零状态可检测的, 则存在控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{G}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.3.17)$$

使得系统在平衡点 \mathbf{x}^* 处渐进稳定 (\mathbf{K} 为正定矩阵)。

将式 (6.3.17) 代入式 (6.3.16) 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R} - \mathbf{G} \mathbf{K} \mathbf{G}^T) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.3.18)$$

令误差哈密顿函数为 $H_e = H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}^*) > 0$, 则

$$\dot{H}_e = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \left(\mathbf{G}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{K} \left(\mathbf{G}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (6.3.19)$$

由于 \mathbf{K} 为正定矩阵, \mathbf{R} 为半正定矩阵, 可知 $\dot{H}_e \leq 0$, 故 \dot{H}_e 是式 (6.3.19) 的一个 Lyapunov 函数。又因为式 (6.3.16) 是可检测的, 故有在控制律 \mathbf{u} 作用下, 受控非线性式 (6.3.16) 在平衡点 \mathbf{x}^* 处渐近稳定。

对于系统 (6.3.15) 可以证明系统是零状态可检测的。若取能量哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}) = -ax_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2x_3^2, \text{ 系统 (6.3.15) 变为}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (6.3.20)$$

$$\text{式中, } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1/d \end{pmatrix}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -a \\ x_2 \\ d^2x_3 \end{pmatrix}。$$

系统 (6.3.20) 的具体形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{E}'_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{D}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -T'_d \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\omega_0 V_s}{M} E'_q \sin \delta & 0 \\ \frac{(x_d - x'_d) V_s}{T_{d0}} \cos \delta & \frac{1}{T_{d0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ V_f \end{pmatrix} \quad (6.3.21)$$

式中, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0}{M} P_m & \omega - \omega_0 & \frac{E'_q}{T_q'^2} \end{pmatrix}^T$ 。

由系统 (6.3.15) 可以推知, 系统 (6.3.21) 是零状态可检测的。于是可得系统无源控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{G}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega_0 V_s}{M} \sin \delta & \frac{(x_d - x'_d) V_s}{T_{d0}} \cos \delta \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_{d0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0}{M} P_m \\ \omega - \omega_0 \\ \frac{E'_q}{T_q'^2} \end{pmatrix}$$

若取 $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, 则系统控制器为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0 V_s E'_q k_1 (\omega - \omega_0)}{M} \sin \delta - \frac{k_1 (x_d - x'_d) V_s E'_q}{T_{d0}} \cos \delta \\ -\frac{k_2 E'_q}{T_{d0} T_q'^2} \end{pmatrix} \quad (6.3.22)$$

3. 数字仿真研究

利用电力系统分析综合程序 (PSASP), 采用用户自定义模型功能, 可实现对单机无穷大系统 (图 6.3.14) 进行数字仿真, 仿真示意图如图 6.3.9 所示, 并与 PID 常规控制方式进行比较。系统有关参数如下: $M=66.67$, $D=12.8$, $T_{d0}=7.5$, $x_d=0.144$, $x'_d=0.0225$, $x_q=0.1395$, $x_1=0.0142$, $x_L=0.0378$, $\omega_0=314\text{rad/s}$, $P_{m0}=0.875$ 。同时取 $k_1=0.1$, $k_2=0.05$ 。

仿真条件设为: $t=0.2\text{s}$ 时, 传输线路在靠母线②的 10% 处发生三相短路, $t=0.1\text{s}$ 后, 故障排除。图 6.3.10 给出了发电机功角摇摆曲线, 图 6.3.11 给出了 SVC 安装点的电压波形。

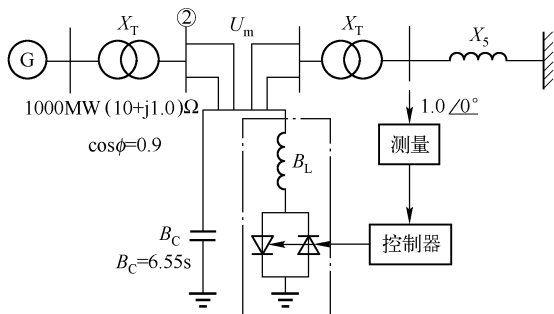


图 6.3.9 单机无穷大系统仿真示意图

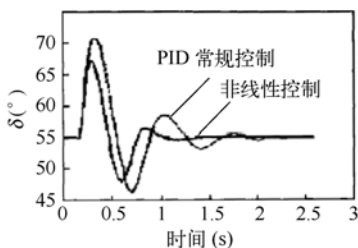


图 6.3.10 发电机功角摇摆曲线

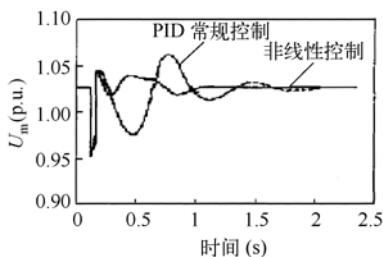


图 6.3.11 SVC 安装点的电压波形

由图 6.3.10 可以看出，在大扰动故障情况下，与常规控制相比，发电机功角 δ 能够在基于哈密顿能量函数理论构造的控制器下，更迅速地趋向故障后系统平衡状态，保持了系统渐进稳定。由图 6.3.11 看出，系统在大扰动故障下，安装点电压有一个闪变，但很快电压趋于稳定，表明该控制策略对于维持 SVC 接入点的电压水平也具有较好的效果。

当采用图 6.3.1 所示 SVC 的电路结构时，其 SVC 的 EL 模型为式 (6.3.5)。可将 (6.3.5) 转换成 PCHD 的形式，利用 5.2.3 节介绍的方法进行无源控制器设计，详见参考文献[67]。

6.4 无源控制理论在电力滤波器中的应用

随着现代电力电子技术、数字信号处理技术和先进控制理论的发展，采用有源电力滤波器 (Active Power Filter, APF) 对电网谐波进行动态实时补偿，已成为解决谐波污染问题最有效途径之一^[68]。为有效对 APF 进行有效控制，采用的非线性控制方法主要包括反馈线性化、反步法、无源性控制 (PBC) 等。其中，PBC 方法从能量的角度出发，通过配置系统能量耗散特性方程中的无功分量“无功功率”，迫使系统总能量跟踪期望的能量函数，并使系统的状态变量渐近收敛至设定值。这是

一种全局定义且全局稳定的控制方法，无奇异点。因此，利用基于无源控制理论研究 APF 日益引起研究者的关注。

6.4.1 基于 EL 模型的有源滤波器无源控制^[69]

1. APF 的 EL 模型

APF 主电路及其与系统的连接情况如图 6.4.1 所示。图中， u_k 为系统供电电压源， L_s 、 R_s 分别为源电感和源电阻， L 是滤波电感， R 等效表示 VSC 寄生电阻、开关损耗等效电阻以及滤波电感中的电阻成分的综合效应， C 是直流电容， R_C 表示直流电容 C 中的电阻成分， L_x 则等效表示向非线性负荷供电的变压器漏感。系统电流 i_{sk} 、负荷电流 i_{lk} 、VSC 输出电流 i_{Fk} 的参考方向如图 6.4.1 所示。

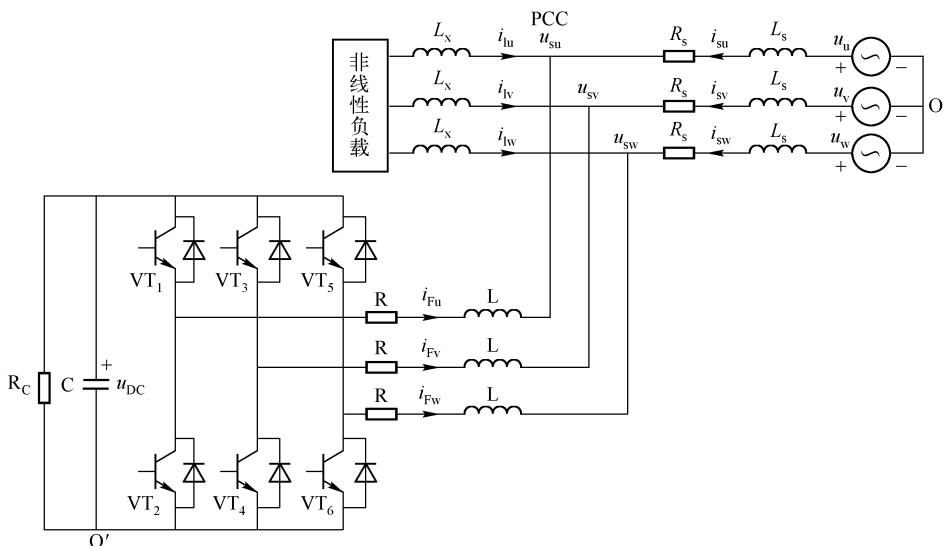


图 6.4.1 APF 主电路及其与系统的连接情况

根据图 6.4.1 可得，在两相同步旋转 dq 坐标系中的 APF 数学模型（采用恒功率变换）为

$$\begin{cases} L \frac{di_{Fd}}{dt} = -Ri_{Fd} + \omega Li_{Fq} + \frac{1}{2} p_d u_{DC} - u_{sd} \\ L \frac{di_{Fq}}{dt} = -Ri_{Fq} - \omega Li_{Fd} + \frac{1}{2} p_q u_{DC} - u_{sq} \\ C \frac{du_{DC}}{dt} = -\frac{1}{2} (p_d i_{Fd} + p_q i_{Fq}) - \frac{u_{DC}}{R_{dc}} \end{cases} \quad (6.4.1)$$

把式 (6.4.1) 整理成如下形式:

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{i}_{Fd} \\ \dot{i}_{Fq} \\ \dot{u}_{DC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega L & -\frac{1}{2}p_d \\ \omega L & 0 & -\frac{1}{2}p_q \\ \frac{1}{2}p_d & \frac{1}{2}p_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Fd} \\ i_{Fq} \\ u_{DC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{dc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Fd} \\ i_{Fq} \\ u_{DC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{sd} \\ -u_{sq} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4.2)$$

即得 APF 的 EL 方程

$$D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (6.4.3)$$

2. APF 的控制器设计

(1) 无源控制器设计

设 APF 系统期望的输出电流为 \mathbf{x}_F^* , 则为实现谐波补偿电流的渐近跟踪, 控制目标制定为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_F^*) = 0 \quad (6.4.4)$$

设计电流调节器, 适当选取系统状态参考值 $\mathbf{x}^* = (x_1^* \ x_2^* \ x_3^*)^T$, 使系统满足控制目标式 (6.4.4)。为此, 定义实际状态 \mathbf{x} 与状态参考值 \mathbf{x}^* 间的跟踪误差为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_{e12}^T \ \mathbf{x}_{e3})^T$, $\mathbf{x}_{e12} = (x_{e1} \ x_{e2})^T$, 则由方程式 (6.4.3) 可得系统的误差动态方程为

$$D\dot{\mathbf{x}}_e + (\mathbf{J} + \mathbf{R})\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\xi} \quad (6.4.5)$$

式中, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} - [\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}^* + (\mathbf{J} + \mathbf{R})\mathbf{x}^*]$ 可视为对 APF 系统的扰动。

定义误差系统的能量函数为

$$H_{ac} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{D} \mathbf{x}_e \quad (6.4.6)$$

对 H_{ac} 求导有

$$\dot{H}_{ac} = -\mathbf{x}_e^T \mathbf{R} \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_e^T \boldsymbol{\xi} \quad (6.4.7)$$

由于 \mathbf{R} 正定, 若 $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e$, $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$, 则有

$$\dot{H}_{ac} = -\mathbf{x}_e^T (\mathbf{R} + \mathbf{K}) \mathbf{x}_e \quad (6.4.8)$$

由式 (6.4.6)、式 (6.4.8) 和 Lyapunov 稳定性定理可知, $H_{ac} > 0$, $\dot{H}_{ac} < 0$, 则 \mathbf{x}_e 渐近收敛到零, 即有 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ 。

令 $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e$, 可确保控制系统的 Lyapunov 稳定性。基于此, 通过选择适当

的 \mathbf{x}^* ，可使系统获得期望的跟踪性能。根据 APF 稳态特性和控制目标方程式 (6.4.4)，解得系统状态参考值需满足

$$D\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x}^* + \mathbf{R}\mathbf{x}^* = \mathbf{u} \quad (6.4.9)$$

于是由 $\mathbf{u} - [\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}^* + (\mathbf{J} + \mathbf{R})\mathbf{x}^*] = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e$ 可得含于 \mathbf{J} 中的 p_d 和 p_q ，即求得控制律。

k_1 、 k_2 、 k_3 是为改善系统动态响应，降低控制系统对参数变化的灵敏度而增加的阻尼项系数。适当调节 k_1 、 k_2 、 k_3 可使谐波电流实际值快速跟随参考值，实现负载时变未知情形下控制系统期望的动、静态性能。

(2) 自适应 PBC 控制器的设计

APF 的控制难点除了非线性耦合和状态变量较难检测以外，APF 实际运行时线路参数会发生变化，如电阻随 APF 温度的升高而变化，其幅值最大可升高至额定值的 200%。APF 线路参数的不确定性，使得系统能量函数改变，影响无源性的分析，进而影响系统输出的稳定收敛。因此需采用自适应控制方案来提高系统的鲁棒性，确保电路参数具有不确定性时也能实现系统的稳定跟踪。

若 APF 系统中的不确定参数为电阻 R_e 和电感 L_s ，表示为

$$\mathbf{R}_e = (R_{e1}\theta \quad R_{e2}\theta \quad \cdots \quad R_{eN}\theta) \quad (6.4.10)$$

式中， θ 为未知参数向量； $R_{ei} (i=1,2,\dots,N)$ 为常量或状态变量的已知函数， N 为相数。

以动态参数观测值 $\hat{\theta}$ 代替 θ ，考虑电阻、电感变化后的 APF 状态误差方程为

$$\mathbf{D}_e \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} + \mathbf{J}_e \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} + \mathbf{R}_{es} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} + \tilde{\mathbf{R}}_e \dot{\mathbf{x}}_{Fed} = 0 \quad (6.4.11)$$

式中， $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} = \dot{\mathbf{x}}_{Fe} - \dot{\mathbf{x}}_{Fed}$ ， $\tilde{\mathbf{R}}_e = \mathbf{R}_e - \hat{\mathbf{R}}_e$ ， $\hat{\mathbf{R}}_e$ 为电阻、电感估计值。

选取 Lyapunov 函数

$$H = \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T \mathbf{D}_e \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)^T (\hat{\theta} - \theta) \quad (6.4.12)$$

沿式 (6.4.11) 轨迹微分式 (6.4.12) 得

$$\dot{H} = -\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T \mathbf{R}_{es} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T \tilde{\mathbf{R}}_e \dot{\mathbf{x}}_{Fed} + (\hat{\theta} - \theta)^T \dot{\hat{\theta}} \quad (6.4.13)$$

利用式 (6.4.11)， $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T \tilde{\mathbf{R}}_e \dot{\mathbf{x}}_{Fed} = \left(\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_{Fed} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T R_{ei} \right) (\hat{\theta} - \theta)$ ，设计参数更新律

$$\dot{\hat{\theta}} = - \left(\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_{Fed} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T R_{ei} \right)^T \quad (6.4.14)$$

则式 (6.4.13) 可化简为

$$\dot{H} = -\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe}^T \mathbf{R}_{es} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{Fe} \quad (6.4.15)$$

$H > 0$, $\dot{H} < 0$, 则由 Lyapunov 稳定性定理, $\tilde{\mathbf{R}}_e \rightarrow 0$, $\dot{\mathbf{x}}_{\text{Fe}} \rightarrow 0$ 。自适应控制实现了 APF 线路参数的自调整, 可有效克服电阻、电感变化对 PBC 性能产生的不利影响。

基于 EL 模型的单相有源电力滤波器无源控制方法见参考文献[70], 关于 APF 无源控制中的鲁棒性分析及相应的控制策略见参考文献[71]。

6.4.2 基于 PCHD 模型的有源滤波器无源控制^[72]

1. APF 的 PCHD 平均化模型

APF 主电路及其与系统的连接情况见图 6.4.1, 在两相同步旋转 dq 坐标系中的 APF 数学模型见式 (6.4.1)。APF 实际运行中, 存在各种外界干扰。假设外界干扰矢量 $\mathbf{w} = (w_q \ w_d \ w_{\text{dc}})^T$, 且 $\mathbf{w} \in L_2[0, T]$ 。此外, 元件参数摄动现象在实际中也普遍存在, 通常 R 、 R_C 、 L 的值都很难精确确定, 电容 C 的容量也会随着设备老化缓慢衰减。因此, 有必要在系统的状态方程中考虑参数摄动和外界干扰的影响。

考虑到实际运行中等效电阻 R 较小, 可相应忽略其变化情况, 则只需考虑 L 、 C 、 R_C 的参数摄动。通常参数 L 、 C 、 R_C 均可表示为

$$\begin{pmatrix} L \\ C \\ 1/R_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{C1} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \quad (6.4.16)$$

式中, L_1 、 C_1 、 $1/R_{C1}$ 均为已知的固定常数 (通常分别是经验值);

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3)^T$ 为未知参数向量。

将式 (6.4.16) 代入式 (6.4.1), 并考虑干扰向量 \mathbf{w} , 可得考虑参数摄动和外界干扰情况下的 APF 平均化模型

$$\begin{cases} L_1 \theta_1 \frac{di_{\text{Fd}}}{dt} = -R i_{\text{Fd}} + \omega L_1 \theta_1 i_{\text{Fq}} + \frac{1}{2} p_d u_{\text{DC}} - u_{\text{sd}} + w_d \\ L_1 \theta_1 \frac{di_{\text{Fq}}}{dt} = -R i_{\text{Fq}} - \omega L_1 \theta_1 i_{\text{Fd}} + \frac{1}{2} p_q u_{\text{DC}} - u_{\text{sq}} + w_q \\ C_1 \theta_2 \frac{du_{\text{DC}}}{dt} = -\frac{1}{2} (p_d i_{\text{Fd}} + p_q i_{\text{Fq}}) - \theta_3 \frac{u_{\text{DC}}}{R_{C1}} + w_{\text{dc}} \end{cases} \quad (6.4.17)$$

定义系统的状态变量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\text{Fd}} \\ \psi_{\text{Fq}} \\ Q_C \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} i_{\text{Fd}} \\ i_{\text{Fq}} \\ u_{\text{DC}} \end{pmatrix} \quad (6.4.18)$$

式中, ψ_{Fd} 、 ψ_{Fq} 分别为 d 、 q 轴磁链; Q_C 为电容 C 两端的电荷量; $\mathbf{D}=\text{diag}(L, L, C)$ 。取 APF 系统的哈密顿函数 $H(\mathbf{x})$ 为

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\psi_{Fd}^2}{2L} + \frac{\psi_{Fq}^2}{2L} + \frac{Q_C^2}{2C} \quad (6.4.19)$$

联立式 (6.4.17) ~ 式 (6.4.19), 可得同时考虑参数摄动和外界干扰影响的 APF PCHD 平均化模型

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_1 \mathbf{u}_{dq} + \mathbf{g}_2 \mathbf{w} \quad (6.4.20)$$

$$\text{式中, } \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega L_1 \theta_1 & \frac{1}{2} p_d \\ -\omega L_1 \theta_1 & 0 & \frac{1}{2} p_q \\ -\frac{1}{2} p_d & -\frac{1}{2} p_q & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 / R_{Cl} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{dq} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_d \\ w_q \\ w_{dc} \end{pmatrix}。$$

2. APF 的自适应 L_2 增益控制律

设计 APF 的自适应 L_2 增益控制律, 采用自适应控制对元件参数摄动进行补偿, L_2 增益控制则被用来确保自适应控制的收敛性和对控制目标的渐近跟踪, 并抑制外界干扰对补偿效果的影响。

设图 6.4.1 所示 APF 系统的控制目标为

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{D}\mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} \psi_{Fd}^* \\ \psi_{Fq}^* \\ Q_C^* \end{pmatrix} \quad (6.4.21)$$

由式 (6.4.18) 和式 (6.4.21) 可得状态误差向量

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \psi_{Fd} - \psi_{Fd}^* \\ \psi_{Fq} - \psi_{Fq}^* \\ Q_C - Q_C^* \end{pmatrix} \quad (6.4.22)$$

由上述可知, 通过控制使 $\mathbf{x}_e \rightarrow 0 (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*)$ 即可等效实现对 APF 各控制目标的渐近跟踪。

为实现对 \mathbf{x}^* 的渐近跟踪, 基于能量平衡关系, 构造误差系统的哈密顿函数 H_d

$$H_d = \frac{1}{2L}(\psi_{Fd} - \psi_{Fd}^*)^2 + \frac{1}{2L}(\psi_{Fq} - \psi_{Fq}^*)^2 + \frac{1}{2C}(Q_C - Q_C^*)^2 \quad (6.4.23)$$

根据式 (6.4.20)、式 (6.4.23) 可得到考虑参数摄动和外界干扰时的误差系统 PCHD 方程

$$\dot{\mathbf{x}}_e = [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})] \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} + \boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{w} \quad (6.4.24)$$

式中, $\boldsymbol{\xi}_1 = [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{Y}^* - \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{g}_1 \mathbf{u}_{dq}$ 。

定义 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3)^\top$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计向量, 并设 $\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{diag}(R, R, \hat{\theta}_3 / R_{C1})$,

$$\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{diag}(L_1 \hat{\theta}_1, L_1 \hat{\theta}_1, C_1 \hat{\theta}_2), \quad \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega L_1 \hat{\theta}_1 & \frac{1}{2} p_d \\ -\omega L_1 \hat{\theta}_1 & 0 & \frac{1}{2} p_q \\ -\frac{1}{2} p_d & -\frac{1}{2} p_q & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 = [\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$$

$\mathbf{Y}^* - \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{g}_1 \mathbf{u}_{dq}$, 对式 (6.4.24) 进行等价变换, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e = & [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})] \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{w} + [\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] - [\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \mathbf{Y}^* - \\ & [\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \dot{\mathbf{Y}}^* \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

对误差系统的哈密顿函数进行扩展, 获得误差系统能量存储函数 V

$$V = H_d + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^\top \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (6.4.26)$$

式中, $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3)$, 且 $\boldsymbol{\Gamma} > 0$ 。

对式 (6.4.26) 等号两边同时取对时间的导数, 并考虑到 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0$, 可得

$$\dot{V} = \frac{\partial^\top H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \dot{\mathbf{x}}_e - (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}))^\top \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (6.4.27)$$

设自适应控制律为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -C(u_{DC} - u_{DCR}) \dot{u}_{DCR} / q_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = L_1 [\omega(i_{Fq} - i_{Fq}^*) i_{Fd}^* - \omega(i_{Fd} - i_{Fd}^*) i_{Fq}^* - (i_{Fd} - i_{Fd}^*) i_{Fd}^* - (i_{Fq} - i_{Fq}^*) i_{Fq}^*] / q_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = -C(u_{DC} - u_{DCR}) u_{DCR} / (R_{C1} q_3) \end{cases} \quad (6.4.28)$$

则式 (6.4.27) 可化简为

$$\dot{V} = -\frac{\partial^\top H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} + \frac{\partial^\top H_d}{\partial \mathbf{x}_e} (\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{w}) \quad (6.4.29)$$

定义评价信号

$$\mathbf{z} = \mathbf{G} \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \quad (6.4.30)$$

式中, $\mathbf{G} = \text{diag}(1, 1, 1)$ 。

为了构造 γ 耗散不等式, 采用完全平方法进行配平, 由式 (6.4.29) 可得

$$\dot{V} \leq -\frac{\partial^T H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} + \frac{1}{2} (\gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2) + \frac{\partial^T H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \right] \quad (6.4.31)$$

通过动态反馈, 注入阻尼, 令

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} = -\mathbf{R}_d \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e} \quad (6.4.32)$$

式中, $\mathbf{R}_d = \text{diag}(r_d, r_d, r_d)$, r_d 为阻尼系数, $r_d > 0$ 。

将式 (6.4.32) 代入式 (6.4.31), 并令 $\mathbf{Q}_1 = -\frac{\partial^T H_d}{\partial \mathbf{x}_e} [\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{R}_d] \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}_e}$, 可得

$$\dot{V} \leq -\mathbf{Q}_1 + \frac{1}{2} (\gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2) \quad (6.4.33)$$

由式 (6.4.33) 并根据 La Salle-Yoshizawa 定理, 可得, 自适应 L_2 增益控制方法不仅确保了对 APF 控制目标的渐近跟踪, 而且抑制了未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 和外界干扰 w 所造成的跟踪误差。

第7章 无源控制理论在交流电动机控制中的应用

无源控制理论是研究系统与外部能量交换（输入、输出）、能量耗散的控制理论，是基于能量观点的全局定义而且全局稳定的控制方法。交流电动机无源控制从电动机的能量入手，利用不影响稳定性的无功功率简化控制器的设计。与交流电动机其他非线性控制策略^[9、22、73]相比，具有全局稳定性、无奇异点、参数变化及外来扰动有较强的鲁棒性。因此，交流电动机无源控制策略成为国内外学者研究的一个热点。

7.1 交流异步电动机无源控制

7.1.1 基于 EL 模型的交流异步电动机无源控制

1. 交流异步电动机的 EL 模型

利用电流等于电荷对时间的导数，可将三相交流异步电动机在两相同步旋转 dq 坐标系中电压方程写成如下形式^[22]：

$$\begin{pmatrix} L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & L_{sd} & 0 & L_{md} \\ L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 \\ 0 & L_{md} & 0 & L_{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{i}_{rd} \\ \dot{i}_{rq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_l L_{sd} & 0 & -\omega_l L_{md} \\ \omega_l L_{sd} & 0 & \omega_l L_{md} & 0 \\ 0 & -\omega_s L_{md} & 0 & -\omega_s L_{rd} \\ \omega_s L_{md} & 0 & \omega_s L_{rd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ u_{rd} \\ u_{rd} \end{pmatrix} \quad (7.1.1)$$

式中， i_{sd} 、 i_{sq} 、 i_{rd} 、 i_{rq} 分别为定子电流、转子电流在 d 、 q 轴上的分量； u_{sd} 、 u_{sq} 、 u_{rd} 、 u_{rd} 分别为定子电压、转子电压在 d 、 q 轴上的分量； L_{sd} 为定子相绕组的等效自感， L_{rd} 为转子相绕组的等效自感， L_{md} 为定、转子相绕组的等效互感； ω_l 为与定子频率相应的同步角速度， ω_s 为转差角频率 $\omega_s = \omega_l - \omega_r$ ， ω_r 为转子角转速； R_s 、 R_r 分别为定子、转子绕组电阻。

忽略扭转弹性转矩的影响，利用 $\omega_r = d\theta_r / dt$ 可得交流异步电动机运动方程为

$$\frac{J}{n_p} \ddot{\theta}_r + \frac{D}{n_p} \dot{\theta}_r = n_p L_{md} (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) - T_L \quad (7.1.2)$$

利用式 (7.1.1) 和式 (7.1.2) 可得交流异步电动机在两相同步旋转 dq 坐标系中的 EL 模型

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\omega_1, \mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{W}_d = \mathbf{u} \quad (7.1.3)$$

$$\text{式中, } \mathbf{x} = (i_{sd} \quad i_{sq} \quad i_{rd} \quad i_{rq} \quad \omega_r)^T, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 \\ L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 & 0 \\ 0 & L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J/n_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\omega_1, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 L_{sd} & 0 & -\omega_1 L_{md} & 0 \\ \omega_1 L_{sd} & 0 & \omega_1 L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 L_{md} + L_{md} \omega_r & 0 & -\omega_1 L_{rd} + L_{rd} \omega_r & 0 \\ \omega_1 L_{md} - L_{md} \omega_r & 0 & \omega_1 L_{rd} - L_{rd} \omega_r & 0 & 0 \\ n_p L_{md} i_{rq} & -n_p L_{md} i_{rd} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D/n_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. 交流异步电动机无源控制器设计

交流异步电动机控制器包括转矩控制器和转速控制器。

(1) 转矩控制器设计

由于交流异步电动机是无源系统^[9, 22], 可采用能量成型和阻尼注入设计转矩控制器^[74]。下面介绍转矩控制器设计过程。

设系统期望的输出转矩为 T_c^* , 转子磁链为 $\boldsymbol{\psi}_r^*$, 则在两相同步旋转 dq 坐标系中 T_c^* 的计算式为

$$T_c^* = n_p L_{md} (i_{sq}^* i_{rd}^* - i_{sd}^* i_{rq}^*) \quad (7.1.4)$$

式中, i_{sd}^* 、 i_{sq}^* 、 i_{rd}^* 、 i_{rq}^* 为对应于 T_c^* 的期望电流; $\boldsymbol{\psi}_r^*$ 为满足特定的优化条件而预先设定的某种曲线。则磁链与转矩调节器的设计, 就是使系统转矩输出

$T_e = n_p L_{md}(i_{sq}i_{rd} - i_{sd}i_{rq})$ 、磁链 ψ_r 渐近的跟踪设定值。为此定义误差向量 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ ，由式 (7.1.3) 得系统的误差方程为

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{C}_{em}(\omega_1, \mathbf{x})\mathbf{x}_e + \mathbf{R}\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\zeta} \quad (7.1.5)$$

式中， $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{u} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* - [\mathbf{C}_{em}(\omega_1, \mathbf{x}) + \mathbf{R}]\mathbf{x}^* - \mathbf{W}_d$ 可视为对系统 (7.1.5) 的扰动。

定义误差方程的能量存储函数为

$$H_e = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{M} \mathbf{x}_e \quad (7.1.6)$$

求 H_e 对时间导数，则

$$\dot{H}_e = \mathbf{x}_e^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{x}_e^T \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{x}_e^T \mathbf{C}_{em}(\omega_1, \mathbf{x})\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_e^T \mathbf{R} \mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^T \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{x}_e^T \mathbf{R} \mathbf{x}_e \quad (7.1.7)$$

由于 \mathbf{R} 是正定的，故若 $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ ，有 $\dot{H}_e < 0$ ， \dot{e} 渐近地收敛到零，即有 $T_e \rightarrow T_e^*$ 。为使 $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ 以保证控制系统的稳定性，同时获得期望跟踪性能，可通过选择适当的 \mathbf{x}^* 来实现，这一过程称为能量成型。

根据交流异步电动机矢量控制的转子磁场定向^[75]思想，转子磁链 ψ_r 在 d 轴上的分量 ψ_{rd} 渐进等于 ψ_r^* ，在 q 轴上的分量 ψ_{rq} 渐进等于 0，即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{rd} = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_{md}i_{sd} + L_{rd}i_{rd}) = \psi_r^* \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{rq} = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_{md}i_{sq} + L_{rd}i_{rq}) = 0 \end{cases} \quad (7.1.8)$$

由式 (7.1.8) 可得

$$\begin{cases} L_{md}i_{sd}^* + L_{rd}i_{rd}^* = \psi_r^* \\ L_{md}i_{sq}^* + L_{rd}i_{rq}^* = 0 \end{cases} \quad (7.1.9)$$

设 ψ_r^* 为常数值，令 $i_{rd}^* = 0$ ，根据式 (7.1.4)、式 (7.1.9) 可得 \mathbf{x}^* 的各分量

$$\begin{cases} i_{sd}^* = \frac{\psi_r^*}{L_{md}} \\ i_{sq}^* = -\frac{L_{rd}i_{rq}^*}{L_{md}} \\ i_{rd}^* = 0 \\ i_{rq}^* = -\frac{T_e^*}{n_p L_{md}i_{sd}^*} \end{cases} \quad (7.1.10)$$

转子磁场定向时转差率计算公式为

$$\omega_s = \omega_l - \omega_r = \omega_l - n_p \omega_m = \frac{L_{md} R_r}{L_{rd} \psi_r} i_{sq}^* \quad (7.1.11)$$

由 $\zeta = 0$ 、式 (7.1.10) 及式 (7.1.11) 考虑到 $\dot{\mathbf{x}}^* = 0$ ，可得

$$\begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_s L_{sd} & 0 & -\omega_s L_{md} & -n_p \psi_{sq} \\ \omega_s L_{sd} & 0 & \omega_s L_{md} & 0 & n_p \psi_{sd} \\ 0 & -\omega_s L_{md} & 0 & -\omega_s L_{rd} & 0 \\ \omega_s L_{md} & 0 & \omega_s L_{rd} & 0 & 0 \\ n_p \psi_{sq} & -n_p \psi_{sd} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{ds}^* \\ i_{sq}^* \\ i_{rd}^* \\ i_{rq}^* \\ \omega_r^* \end{pmatrix} \quad (7.1.12)$$

$$+ \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D/n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix}$$

由 (7.1.12) 可得无源控制律

$$\begin{cases} u_{sd} = -n_p (L_{sd} i_{sq} + L_{md} i_{rq}) \omega_r^* - \frac{n_p R_r (i_{rq}^*)^3}{T_e^*} (L_{md} - \frac{L_{sd} L_{rd}}{L_{md}}) - R_s \frac{T_e^*}{L_{md} n_p i_{rq}^*} \\ u_{sq} = n_p \omega_r^* (L_{sd} i_{sd} + L_{md} i_{rd}) - \frac{R_r L_{sd} i_{rq}^*}{L_{md}} - \frac{R_s L_{rd} i_{rq}^*}{L_{md}} \\ \omega_l = \frac{R_r n_p (i_{rq}^*)^2}{T_e^*} + \omega_r \end{cases} \quad (7.1.13)$$

为了保证整个控制系统严格无源，改善系统动态响应，并降低控制系统对参数变化的灵敏度，在方程 (7.1.13) 中增加阻尼项，得

$$\begin{cases} u_{sd} = -n_p (L_{sd} i_{sq} + L_{md} i_{rq}) \omega_r^* - \frac{n_p R_r (i_{rq}^*)^3}{T_e^*} (L_{md} - \frac{L_{sd} L_{rd}}{L_{md}}) - R_s \frac{T_e^*}{L_{md} n_p i_{rq}^*} - K(i_{sd} - i_{sd}^*) \\ u_{sq} = n_p \omega_r^* (L_{sd} i_{sd} + L_{md} i_{rd}) - \frac{R_r L_{sd} i_{rq}^*}{L_{md}} - \frac{R_s L_{rd} i_{rq}^*}{L_{md}} - K(i_{sq} - i_{sq}^*) \end{cases} \quad (7.1.14)$$

式中， K 为阻尼系数。这一过程被称为阻尼注入。

根据 Espinoza 和 Ortega 的推导^[76, 77], 阻尼系数可以依据如下方程选择:

$$K = \frac{n_p^2 L_{md}^2}{4\varepsilon} \omega_r^2 \quad (7.1.15)$$

式中, $0 < \varepsilon < \min\{R_s, R_r\}$ 。

另一方面, 可取 $K > -R_s$ 以保证系统工作在电动或发电状态时的稳定, 解决了电动机无源控制系统应用于实际高速系统时, 所需大阻尼矩阵系数将造成系统振荡甚至不稳定的矛盾^[78, 79]。

由于采用恒定阻尼注入虽改善了系统动态响应, 但系统到达稳态时的性能受到影响, 对此可采用变阻尼控制方法^[80], 变阻尼由微分跟踪器实现, 在电动机起动或动态过程开始时采用大阻尼, 随后自动调节(变小)阻尼, 从而改善了动态响应; 所采用的微分跟踪器为二阶微分跟踪器^[81], 其形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin_{\text{sign}} \left[x_1 - v(t) + \frac{x_2 |x_2|}{2a}, \delta \right] \end{cases} \quad (7.1.16)$$

$$\text{式中, } \sin_{\text{sign}}(A, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(A), & |A| > \delta \\ \sin \frac{\pi A}{2\delta}, & |A| \leq \delta, \delta > 0 \end{cases}$$

控制器中的转子电流分量 i_{rd} 与 i_{rq} 由 luenberger 状态观测器^[82, 83]估计。

(2) 转速控制器设计

基于无源性的交流异步电动机转矩控制系统可以渐近跟踪时变的转矩, 只需要建立转速误差反馈, 采用比例积分调节器, 就可以得到如下参考转矩:

$$T_e^* = -k_p(\omega_r - \omega_r^*) - k_i \int (\omega_r - \omega_r^*) dt \quad (7.1.17)$$

式中, k_p 、 k_i 分别为比例增益和积分增益, 与系统的稳定性有很大的关系。

综上所述, 可得交流异步电动机无源控制系统结构如图 7.1.1 所示。

为了实现异步电动机转速的全局稳定非线性动态控制, 应用无源性理论从能量的角度分析异步电动机, 简化了异步电动机的控制, 导出一个全局稳定的非线性动态输出反馈控制律。该控制律以变结构的方式注入非线性阻尼, 以加速系统的收敛, 并防止放大电流噪声。该控制律无需对转子电流进行观测, 减少了计算量。系统实现时, 构造了一个线性滤波器以避免转子角加速度的测量, 同时实现了转速的闭环跟踪^[84]。

感应电动机由于其变量非线性耦合、转子电量难以测量、电动机参数时变性三

取系统的能量存储函数

$$H_E = \frac{1}{2} \mathbf{i}_E^T \mathbf{L} \mathbf{i}_E \quad (7.1.19)$$

$$\text{则有} \quad \frac{\partial H_E}{\partial \mathbf{i}_E} = \begin{pmatrix} L_{sd} i_{sd} + L_{md} i_{rd} \\ L_{sd} i_{sq} + L_{md} i_{rq} \\ L_{rd} i_{rd} + L_{md} i_{sd} \\ L_{rd} i_{rq} + L_{md} i_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & L_{sd} & 0 & L_{md} \\ L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 \\ 0 & L_{md} & 0 & L_{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{i}_E \quad (7.1.20)$$

$$\mathbf{i}_E = \mathbf{L}^{-1} \frac{\partial H_E}{\partial \mathbf{i}_E} \quad (7.1.21)$$

根据式 (7.1.18) 可得

$$\dot{\mathbf{i}}_E = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_E(\omega_l, \omega_r) \mathbf{i}_E - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_E + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_E = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_E(\omega_l, \omega_r) \mathbf{L}^{-1} \frac{\partial H_E}{\partial \mathbf{i}_E} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} \frac{\partial H_E}{\partial \mathbf{i}_E} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_E \quad (7.1.22)$$

取 $\mathbf{J}_{EH}(\omega_l, \omega_r) = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_E(\omega_l, \omega_r) \mathbf{L}^{-1} = -\mathbf{J}_{EH}^T(\omega_l, \omega_r)$, $\mathbf{R}_{EH} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{R}_{EH}^T$, $\mathbf{g}_{EH} = \mathbf{L}^{-1}$, 则式 (7.1.22) 就可转换成 PCHD 的形式

$$\dot{\mathbf{i}}_E = [\mathbf{J}_{EH}(\omega_l, \omega_r) - \mathbf{R}_{EH}] \frac{\partial H_E}{\partial \mathbf{i}_E} + \mathbf{g}_{EH} \mathbf{u}_E \quad (7.1.23)$$

(2) 交流异步电动机电气-机械系统的 PCHD 数学模型 I

将交流异步电动机电气-机械系统统一数学模型 (7.1.3) 重写为

$$\begin{pmatrix} L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sd} & 0 & L_{md} & 0 \\ L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 & 0 \\ 0 & L_{md} & 0 & L_{rd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J/n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \\ \dot{i}_{rd} \\ \dot{i}_{rq} \\ \dot{\omega}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_l L_{sd} & 0 & -\omega_l L_{md} & 0 \\ \omega_l L_{sd} & 0 & \omega_l L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_s L_{md} & 0 & -\omega_s L_{rd} & 0 \\ \omega_s L_{md} & 0 & \omega_s L_{rd} & 0 & 0 \\ n_p L_{md} \dot{i}_{rq} & -n_p L_{md} \dot{i}_{rd} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D/n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.24)$$

式 (7.1.24) 可整理成

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{EM}(\omega_l, \mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{W}_d = \mathbf{u} \quad (7.1.25)$$

$$\text{式中, } \mathbf{C}_{\text{EM}}(\omega_1, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_s L_{\text{sd}} & 0 & -\omega_s L_{\text{md}} & -n_p \psi_{\text{sq}} \\ \omega_s L_{\text{sd}} & 0 & \omega_s L_{\text{md}} & 0 & n_p \psi_{\text{sd}} \\ 0 & -\omega_s L_{\text{md}} & 0 & -\omega_s L_{\text{rd}} & 0 \\ \omega_s L_{\text{md}} & 0 & \omega_s L_{\text{rd}} & 0 & 0 \\ n_p \psi_{\text{sq}} & -n_p \psi_{\text{sd}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\text{sd}} = L_{\text{sd}} i_{\text{sd}} + L_{\text{md}} i_{\text{rd}},$$

$$i_{\text{rd}}, \quad \psi_{\text{sq}} = L_{\text{sd}} i_{\text{sq}} + L_{\text{md}} i_{\text{rq}}, \quad \mathbf{C}_{\text{EM}}(\omega_1, \mathbf{x}) = -\mathbf{C}_{\text{EM}}^{\text{T}}(\omega_1, \mathbf{x}).$$

取系统的能量存储函数为

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (7.1.26)$$

$$\text{则有 } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} L_{\text{sd}} i_{\text{sd}} + L_{\text{md}} i_{\text{rd}} \\ L_{\text{sd}} i_{\text{sq}} + L_{\text{md}} i_{\text{rq}} \\ L_{\text{rd}} i_{\text{rd}} + L_{\text{md}} i_{\text{sd}} \\ L_{\text{rd}} i_{\text{rq}} + L_{\text{md}} i_{\text{sq}} \\ \frac{J}{n_p} \omega_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\text{sd}} & 0 & L_{\text{md}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\text{sd}} & 0 & L_{\text{md}} & 0 \\ L_{\text{md}} & 0 & L_{\text{rd}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\text{md}} & 0 & L_{\text{rd}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J/n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\text{sd}} \\ i_{\text{sq}} \\ i_{\text{rd}} \\ i_{\text{rq}} \\ \omega_r \end{pmatrix} = \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (7.1.27)$$

由式 (7.1.27) 可得

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.1.28)$$

根据式 (7.1.25) 得

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_{\text{EM}}(\omega_1, \omega_r) \mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_d + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u} \quad (7.1.29)$$

式 (7.1.28) 代入式 (7.1.29) 可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[-\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_{\text{EM}}(\omega_1, \mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}^{-1} \right] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_d + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u} \quad (7.1.30)$$

令 $\mathbf{J}_{\text{EM}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_{\text{EM}}(\omega_1, \mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1} = -\mathbf{J}_{\text{EM}}^{\text{T}}$, $\mathbf{R}_{\text{EM}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R}_{\text{EM}}^{\text{T}}$, $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_d$, $\mathbf{g}_{\text{EM}} = \mathbf{M}^{-1}$, 则交流异步电动机电气-机械系统的 PCHD 模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_{\text{EM}} - \mathbf{R}_{\text{EM}}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_{\text{EM}} \mathbf{u} \quad (7.1.31)$$

(3) 交流异步电动机电气-机械系统的 PCHD 数学模型 II

PCHD 数学模型 I 是以电流 \mathbf{x} 和角速度 ω_r 为状态变量建立的, 下面建立以磁链 $\boldsymbol{\psi}$ 和角速度 ω_r 为状态变量建立 PCHD 数学模型, 即数学模型 II。

$$\text{取 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \\ \frac{J}{n_p} \omega_r \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega_r \end{pmatrix}, \text{ 式 (7.1.24) 可变为}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_{sd} \\ \dot{\psi}_{sq} \\ \dot{\psi}_{rd} \\ \dot{\psi}_{rq} \\ \frac{J}{n_p} \dot{\omega}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_l & 0 & 0 & 0 \\ \omega_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_s & 0 \\ 0 & 0 & \omega_s & 0 & 0 \\ -\frac{n_p(L_{rd}\psi_{sq} - L_{md}\psi_{rq})}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & \frac{n_p(L_{rd}\psi_{sd} - L_{md}\psi_{rd})}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \\ \frac{J}{n_p} \omega_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{R_s L_{rd}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & -\frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s L_{rd}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & -\frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 \\ -\frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & \frac{R_r L_{sd}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 & \frac{R_r L_{sd}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \\ \frac{J}{n_p} \omega_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.32)$$

式中, $\sigma = 1 - \frac{L_{md}^2}{L_{sd} L_{rd}}$ 。取系统的能量存储函数为

$$H = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2J} x_5^2 = \frac{1}{2L_s L_r \sigma} (L_r x_1^2 + L_r x_2^2 + L_s x_3^2 + L_s x_4^2 - 2L_m x_1 x_3 - 2L_m x_2 x_4) + \frac{1}{2J} x_5^2 \quad (7.1.33)$$

由 (7.1.33) 可得

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial x_4} \\ \frac{\partial H}{\partial x_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_r x_1 - L_m x_3}{L_s L_r \sigma} \\ \frac{L_r x_2 - L_m x_4}{L_s L_r \sigma} \\ \frac{L_s x_3 - L_m x_1}{L_s L_r \sigma} \\ \frac{L_s x_4 - L_m x_2}{L_s L_r \sigma} \\ \frac{x_5}{J} \end{pmatrix} \quad (7.1.34)$$

利用式 (7.1.34) 可将式 (7.1.32) 转换为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_H - \mathcal{R}_H) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{W}_d + \mathbf{u} \quad (7.1.35)$$

$$\text{式中, } \mathbf{W}_d = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -T_L)^T, \quad \mathbf{J}_H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_s L_{sd} & 0 & \omega_s L_{md} & n_p x_2 \\ -\omega_s L_{sd} & 0 & -\omega_s L_{md} & 0 & -n_p x_1 \\ 0 & \omega_s L_{md} & 0 & \omega_s L_r & 0 \\ -\omega_s L_{md} & 0 & -\omega_s L_r & 0 & 0 \\ -n_p x_2 & n_p x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_H = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}。$$

2. 基于 PCHD 模型的交流异步电动机无源控制

(1) 系统平衡点 (期望轨迹) 的确定

交流异步电动机 PCHD 模型式 (7.1.35) 以定子、转子磁链及角速度为状态变量建立的, 因此需确定系统期望平衡点 $\mathbf{x}^* = (\psi_{sd}^* \quad \psi_{sq}^* \quad \psi_{rd}^* \quad \psi_{rq}^* \quad J\omega_r^*/n_p)^T$ 。下面根据给定的电动机机械角速度 ω_m^* 、电磁转矩为给定 T_e^* 及转子磁链 ψ_r^* 确定 \mathbf{x}^* 。

根据交流异步电动机矢量控制的转子磁场定向^[75]思想, 则有 $x_3^* = \psi_r^*$, $x_4^* = 0$ 。

用定、转子磁链把电磁转矩表示为

$$T_c = \frac{n_p L_{md}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} (\psi_{sq} \psi_{rd} - \psi_{sd} \psi_{rq}) = \frac{n_p L_{md}}{L_{sd} L_{rd} \sigma} (x_2 x_3 - x_1 x_4) \quad (7.1.36)$$

在期望点处, $T_c = T_c^*$, 根据式 (7.1.36) 可得

$$x_2^* = \frac{L_{sd} L_{rd} \sigma T_c^*}{n_p L_{md} x_3^*} = \frac{L_{sd} L_{rd} \sigma T_c^*}{n_p L_{md} \psi_r^*} \quad (7.1.37)$$

根据转子磁场定向, $\dot{q}_{rd}^* = -\frac{1}{R_r} \frac{d\psi_r^*}{dt} = 0$, 根据磁链与电流的关系得

$$x_1^* = L_{sd} \frac{x_3^*}{L_{md}} = \frac{L_{sd}}{L_{md}} \psi_r^* \quad (7.1.38)$$

根据给定的电动机机械角速度 ω_m^* , 可得 $x_5^* = J \omega_r^* / n_p = J \omega_m^*$ 。

综上, 可得系统期望平衡点为

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_{sd}}{L_{md}} \psi_r^* \\ \frac{L_{sd} L_{rd} \sigma T_c^*}{n_p L_{md} \psi_r^*} \\ \psi_r^* \\ 0 \\ J \omega_m^* \end{pmatrix} \quad (7.1.39)$$

(2) 控制器设计方法

根据交流异步电动机 PCHD 模型 (式 (7.1.35)) 及式 (5.2.88) ~ 式 (5.2.92) 进行控制器设计 ($D=0$)。

① 控制律的确定

根据式 (5.2.88) 有

$$(\mathbf{J}_d - \mathcal{R}_d) \mathbf{K}(\mathbf{x}) + (\mathbf{J}_a - \mathcal{R}_a) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}_d - \mathbf{u} = 0 \quad (7.1.40)$$

式中, $\mathbf{J}_d = \mathbf{J}_H + \mathbf{J}_a$, $\mathcal{R}_d = \mathcal{R}_H + \mathcal{R}_a$, \mathbf{J}_a 、 \mathcal{R}_a 分别为待定的互联与阻尼系

数, $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_a}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H_a}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_3} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_4} \quad \frac{\partial H_a}{\partial x_5} \right)^T = (k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5)^T$ 。

设 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, 期望的能量存储函数为

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_e \quad (7.1.41)$$

$$\text{则有} \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_a}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}^* \end{cases} \quad (7.1.42)$$

将式 (7.1.42) 代入式 (7.1.40) 得

$$-(\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}^* + (\mathbf{J}_a - \mathbf{R}_a) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{W}_d - \mathbf{u} = 0 \quad (7.1.43)$$

根据结构守恒式 (5.2.89), 可取

$$\mathbf{J}_a(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -J_{12} & 0 & -J_{14} & 0 \\ J_{12} & 0 & -J_{23} & 0 & -J_{25} \\ 0 & J_{23} & 0 & -J_{34} & 0 \\ J_{14} & 0 & J_{34} & 0 & 0 \\ 0 & J_{25} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求得的其他矩阵分别为

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{sd}\sigma} & 0 & -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{sd}\sigma} & 0 & -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & 0 \\ -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & 0 & \frac{1}{L_{rd}\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} & 0 & \frac{1}{L_{rd}\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{n_p} \end{pmatrix} \quad (7.1.44)$$

$$\mathbf{J}_d = \begin{pmatrix} 0 & \omega_s L_{sd} - J_{12} & 0 & \omega_s L_{md} - J_{14} & n_p x_2 \\ J_{12} - \omega_s L_{sd} & 0 & -\omega_s L_{md} - J_{23} & 0 & -n_p x_1 - J_{25} \\ 0 & J_{23} + \omega_s L_m & 0 & \omega_s L_r - J_{34} & 0 \\ J_{14} - \omega_s L_m & 0 & J_{34} - \omega_s L_r & 0 & 0 \\ -n_p x_2 & J_{25} + n_p x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.45)$$

$$\mathbf{R}_d = \begin{pmatrix} R_s + r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s + r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r + r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.46)$$

将 \mathbf{J}_d 、 \mathbf{R}_d 、 \mathbf{M}^{-1} 、 \mathbf{J}_a 、 \mathbf{R}_a 代入式 (7.1.43)，得

$$\begin{pmatrix} R_s + r_1 & J_{12} - \omega_s L_{sd} & 0 & J_{14} - \omega_s L_{md} & -n_p x_2 \\ \omega_s L_{sd} - J_{12} & R_s + r_2 & \omega_s L_{md} + J_{23} & 0 & n_p x_1 + J_{25} \\ 0 & -(J_{23} + \omega_s L_{md}) & R_r + r_3 & J_{34} - \omega_s L_{rd} & 0 \\ \omega_s L_{md} - J_{14} & 0 & \omega_s L_{rd} - J_{34} & R_r + r_4 & 0 \\ n_p x_2 & -(J_{25} + n_p x_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{L_{sd}\sigma} x_1^* - \frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_3^* \\ \frac{1}{L_{sd}\sigma} x_2^* - \frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_4^* \\ -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_1^* + \frac{1}{L_{rd}\sigma} x_3^* \\ -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_2^* + \frac{1}{L_{rd}\sigma} x_4^* \\ \frac{J}{n_p} x_5^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_1 & -J_{12} & 0 & -J_{14} & 0 \\ J_{12} & -r_2 & -J_{23} & 0 & -J_{25} \\ 0 & J_{23} & -r_3 & -J_{34} & 0 \\ J_{14} & 0 & J_{34} & -r_4 & 0 \\ 0 & J_{25} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{L_{sd}\sigma} x_1 - \frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_3 \\ \frac{1}{L_{sd}\sigma} x_2 - \frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_4 \\ -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_1 + \frac{1}{L_{rd}\sigma} x_3 \\ -\frac{L_{md}}{L_{sd}L_{rd}\sigma} x_2 + \frac{1}{L_{rd}\sigma} x_4 \\ \frac{J}{n_p} x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.47)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
u_{sd} &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_s}{L_{sd}} x_1^* - \omega_s x_2^* \sigma - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_3^* \right) + \frac{r_1}{L_{sd} \sigma} (-e_1 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_3) + \frac{J_{12}}{L_{sd} \sigma} (-e_2 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) \\
&\quad + \frac{J_{14}}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_2 - e_4 \right) - n_p x_2 \frac{J}{n_p} x_5^* \\
u_{sq} &= \frac{1}{\sigma} \left(\omega_s x_1^* \sigma + \frac{R_s}{L_{sd}} x_2^* - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_4^* \right) + \frac{J_{12}}{L_{sd} \sigma} (e_1 - \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_3) + \frac{r_2}{L_{sd} \sigma} (-e_2 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) \\
&\quad + \frac{J_{23}}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_1 - e_3 \right) - J_{25} \frac{J}{n_p} e_5 + n_p x_1 \frac{J}{n_p} x_5^* \\
0 &= \frac{1}{\sigma} \left(-\omega_s x_4^* \sigma - \frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd}} x_1^* + \frac{R_r}{L_{rd}} x_3^* \right) + \frac{J_{23}}{L_{sd} \sigma} (e_2 - \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) + \frac{r_3}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_1 - e_3 \right) \\
&\quad + \frac{J_{34}}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_2 - e_4 \right) \\
0 &= \frac{1}{\sigma} \left(\omega_s x_3^* \sigma - \frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd}} x_2^* + \frac{R_r}{L_{rd}} x_4^* \right) + \frac{J_{14}}{L_{sd} \sigma} (e_1 - \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_3) + \frac{J_{34}}{L_{rd} \sigma} \left(-\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_1 + e_3 \right) \\
&\quad + \frac{r_4}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_2 - e_4 \right) \\
0 &= \frac{n_p}{L_{sd} \sigma} (x_2 x_1^* - x_1 x_2^* - \frac{L_{md} x_2}{L_{rd}} x_3^* + \frac{L_{md} x_1}{L_{rd}} x_4^*) + \frac{J_{25}}{L_{sd} \sigma} (e_2 - \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) + T_L
\end{aligned} \right. \quad (7.1.48)$$

取 $J_{12} = \frac{L_{md}}{L_{rd}} J_{14}$ 、 $J_{23} = -J_{14}$ 、 $J_{34} = \frac{L_{rd}}{L_{md}} J_{14}$ ，式 (7.1.48) 可变成

$$\left\{ \begin{aligned}
u_{sd} &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_s}{L_{sd}} x_1^* - \omega_s x_2^* \sigma - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_3^* \right) + \frac{r_1}{L_{sd} \sigma} (-e_1 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_3) - \frac{1}{L_{rd}} J_{14} e_4 - n_p x_2 \frac{J}{n_p} x_5^* \\
u_{sq} &= \frac{1}{\sigma} \left(\omega_s x_1^* \sigma + \frac{R_s}{L_{sd}} x_2^* - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_4^* \right) + \frac{J_{14}}{L_{rd}} e_3 + \frac{r_2}{L_{sd} \sigma} (-e_2 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) - J_{25} \frac{J}{n_p} e_5 + n_p x_1 \frac{J}{n_p} x_5^* \\
0 &= \frac{1}{\sigma} \left(-\omega_s x_4^* \sigma - \frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd}} x_1^* + \frac{R_r}{L_{rd}} x_3^* \right) - \frac{J_{14}}{L_{md}} e_4 + \frac{r_3}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_1 - e_3 \right) \\
0 &= \frac{1}{\sigma} \left(\omega_s x_3^* \sigma - \frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd}} x_2^* + \frac{R_r}{L_{rd}} x_4^* \right) + \frac{J_{14}}{L_{md}} e_3 + \frac{r_4}{L_{rd} \sigma} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_2 - e_4 \right) \\
0 &= \frac{n_p}{L_{sd} \sigma} (x_2 x_1^* - x_1 x_2^* - \frac{L_{md} x_2}{L_{rd}} x_3^* + \frac{L_{md} x_1}{L_{rd}} x_4^*) + \frac{J_{25}}{L_{sd} \sigma} (e_2 - \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) + T_L
\end{aligned} \right. \quad (7.1.49)$$

考虑到 $\omega_1 = \omega_s + \omega_r$ ，由式 (7.1.49) 中的第一、第二、第四个式子可得控制律

$$\begin{cases} u_{sd} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_s}{L_{sd}} x_1^* - \omega_s x_2^* \sigma - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_3^* \right) + \frac{r_1}{L_{sd} \sigma} (-e_1 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_3) - \frac{1}{L_{rd}} J_{14} e_4 - n_p x_2 \frac{J}{n_p} x_5^* \\ u_{sq} = \frac{1}{\sigma} \left(\omega_s x_1^* \sigma + \frac{R_s}{L_{sd}} x_2^* - \frac{L_{md} R_s}{L_{sd} L_{rd}} x_4^* \right) + \frac{J_{14}}{L_{rd}} e_3 + \frac{r_2}{L_{sd} \sigma} (-e_2 + \frac{L_{md}}{L_{rd}} e_4) - J_{25} \frac{J}{n_p} e_5 + n_p x_1 \frac{J}{n_p} x_5^* \\ \omega_1 = \frac{1}{\sigma x_3^*} \frac{L_{md} R_r}{L_{sd} L_{rd}} x_2^* - \frac{1}{\sigma x_3^*} \frac{R_r}{L_{rd}} x_4^* - \frac{J_{14}}{L_{md} x_3^*} e_3 - \frac{r_4}{L_{rd} \sigma x_3^*} \left(\frac{L_{md}}{L_{sd}} e_2 - e_4 \right) + \omega_r \end{cases} \quad (7.1.50)$$

根据式 (7.1.50)，通过选取不同的 J_{14} 、 J_{25} 、 r_1 、 r_2 、 r_4 就可获得不同的控制律，亦可获得不同的控制性能。

② 稳定性分析

当系统期望 \mathbf{x}^* 为恒定值时，下式成立：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0 \\ \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial^2 H_d}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1} \end{cases} \quad (7.1.51)$$

式 (7.1.51) 中 $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$ ，显然满足式 (5.2.90)。当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ 时， $\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$ ，

式 (5.2.91) 得到满足，即 $H_d(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^* 存在极值。由于 $|\mathbf{M}^{-1}| = \frac{J}{n_p \sigma^2 L_{sd}^2 L_{rd}^2} > 0$ ，则

$H_d(\mathbf{x})$ 的海森矩阵 $\frac{\partial^2 H_d}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) > 0$ （正定），式 (5.2.92) 得到满足， $H_d(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^* 存在最小值。因此，闭环系统在平衡点是稳定的。

7.1.3 基于无源的交流异步电动机能量最优控制

基于交流异步电动机的无源性，研究提高电动机的效率和功率因数成为国内外研究的热点^[9, 89~92]。下面介绍通过能量损失最小化提高效率和依据最小磁场能量原则提高功率因数的无源控制策略。

1. 基于无源性的交流异步电动机能量最优控制策略 I

该策略在动态系统无源性的基础上，从能量的角度应用无源化方法设计了感应电动机调速系统。利用系统的能量函数作为 Lyapunov 函数，保证电动机的转速和磁链能够渐进跟踪其给定值。根据电动机的能量平衡关系，得出使得电动机能量损

耗最小的转子磁链给定值。

(1) 交流异步电动机数学模型及能量守恒关系

将参考文献[22]中交流异步电动机在两相静止 $\alpha\beta$ 坐标系模型写成电磁子系统模型和机械子系统模型如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma L_{sd} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{rd}} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{sa\beta} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R_s + R_r \frac{L_{md}^2}{L_{rd}^2}) \mathbf{I} & -R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \mathbf{I} \\ -R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \mathbf{I} & \frac{R_r}{L_{rd}^2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sa\beta} \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_r \frac{L_{md}}{L_{rd}} \mathbf{J} \\ 0 & -\frac{\omega_r}{L_{rd}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sa\beta} \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{pmatrix} \quad (7.1.52)$$

$$\frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p L_{md}}{L_{rd}} (\boldsymbol{\psi}_{ra} i_{s\beta} - \boldsymbol{\psi}_{r\beta} i_{sa}) - T_L \quad (7.1.53)$$

对于电磁子系统选择电机绕组中储存的磁场能量函数作为系统的存储函数，其表达式为

$$H_{EM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sa\beta}^T & \boldsymbol{\psi}_r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma L_{sd} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{rd}} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sa\beta} \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{pmatrix} \quad (7.1.54)$$

对其求导有

$$\dot{H}_{EM} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sa\beta}^T & \boldsymbol{\psi}_r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta L_{sd} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{rd}} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{sa\beta} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_r \end{pmatrix} = \mathbf{i}_{sa\beta}^T \mathbf{u}_s - R_s \mathbf{i}_{sa\beta}^T \mathbf{i}_{sa\beta} - R_r \mathbf{i}_{sa\beta}^T \mathbf{i}_{sa\beta} - \frac{\omega_r}{n_p} T_e \quad (7.1.55)$$

式(7.1.55)反映了电动机电磁系统的能量守恒关系。

对于机械子系统，选择电动机动能作为存储函数，其表达式为

$$H_M = \frac{1}{2} J \left(\frac{\omega_r}{n_p} \right)^2 \quad (7.1.56)$$

对其求导有

$$\dot{H}_M = J \frac{\omega_r}{n_p} \left(\frac{\dot{\omega}_r}{n_p} \right) = \frac{\omega_r}{n_p} (T_e - T_L) \quad (7.1.57)$$

式(7.1.57)反映了电机机械系统的能量守恒关系，电磁转矩克服负载转矩后转化成系统的动能。

(2) 交流异步电动机无源控制

由于电动机机械系统与电磁系统的时间常数相差较大，因此可以采用分层控制

器。首先，设计速度控制器得到转矩指令 T_e^* ，使得电动机转速在未知负载转矩 T_L 的扰动下跟踪给定值 ω_r^* 。然后对于电磁系统设计控制器，使得电磁转矩为 T_e^* ，且电动机磁链也跟踪其给定值 ψ_r^* 。

采用如下的 PI 调节器作为速度控制器

$$T_e^* = k_p (\omega_r^* - \omega_r) + k_i \int_0^t (\omega_r^* - \omega_r) dt \quad (7.1.58)$$

下面应用无源化的方法设计电磁系统的转矩和磁链控制器。首先，设系统的磁链期望状态

$$\begin{cases} \psi_{ra}^* = \psi_r^* \cos \theta \\ \psi_{r\beta}^* = \psi_r^* \sin \theta \\ \dot{\theta}_l = \omega_r + R_r T_e^* / n_p \psi_r^{*2} \end{cases} \quad (7.1.59)$$

根据式 (7.1.52) 中磁链方程并保留其非线性特性，可得电流期望值

$$\begin{cases} i_{sa}^* = \frac{L_{rd}}{R_r L_{md}} \dot{\psi}_{ra}^* + \frac{1}{L_{md}} \psi_{ra}^* + \frac{L_{rd}}{R_r L_{md}} \omega_r \psi_{r\beta}^* \\ i_{s\beta}^* = \frac{L_{rd}}{R_r L_{md}} \dot{\psi}_{r\beta}^* + \frac{1}{L_{md}} \psi_{r\beta}^* - \frac{L_{rd}}{R_r L_{md}} \omega_r \psi_{ra}^* \end{cases} \quad (7.1.60)$$

经推导可知

$$\begin{cases} T_e^* = \frac{n_p L_{md}}{L_{rd}} (\psi_{ra}^* i_{s\beta}^* - \psi_{r\beta}^* i_{sa}^*) \\ \dot{\psi}_r^{*2} = \dot{\psi}_{ra}^{*2} + \dot{\psi}_{r\beta}^{*2} \end{cases} \quad (7.1.61)$$

式 (7.1.61) 表明，当系统的状态达到所设定的期望状态时就可达到控制目标。

下面根据无源化控制方法设计电压控制律，保证系统的状态能够跟踪上述期望状态。保持系统 (7.1.52) 中电流方程原有非线性结构不变，加上线性输出反馈，可得控制律为

$$\begin{cases} u_{sa} = \sigma L_{sd} \dot{i}_{sa}^* + \left(R_s + R_r \frac{L_{md}^2}{L_{rd}^2} \right) i_{sa}^* - R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \psi_{ra}^* - \omega_r \frac{L_{md}}{L_{rd}} \psi_{r\beta}^* - k_i (i_{sa} - i_{sa}^*) \\ u_{s\beta} = \sigma L_{sd} \dot{i}_{s\beta}^* + \left(R_s + R_r \frac{L_{md}^2}{L_{rd}^2} \right) i_{s\beta}^* - R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \psi_{r\beta}^* - \omega_r \frac{L_{md}}{L_{rd}} \psi_{ra}^* - k_i (i_{s\beta} - i_{s\beta}^*) \end{cases} \quad (7.1.62)$$

$$\text{记} \begin{cases} \mathbf{e}_i = (e_1 \quad e_2)^T = (i_{sa} - i_{sa}^* \quad i_{s\beta} - i_{s\beta}^*)^T \\ \mathbf{e}_\psi = (e_3 \quad e_4)^T = (\psi_{ra} - \psi_{ra}^* \quad \psi_{r\beta} - \psi_{r\beta}^*)^T \end{cases}$$

为跟踪误差信号，把上述控制律（7.1.62）代入式（7.1.52），整理可得如下的误差动态方程：

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sigma L_{sd} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{rd}} \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ \dot{\mathbf{e}}_\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R_s + R_r \frac{L_{md}^2}{L_{rd}^2}) \mathbf{I}_2 & -R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \mathbf{I}_2 \\ -R_r \frac{L_{md}}{L_{rd}^2} \mathbf{I}_2 & \frac{R_r}{L_{rd}^2} \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_\psi \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & \omega_r \frac{L_{md}}{L_{rd}} \mathbf{J}_2 \\ 0 & -\frac{\omega_r}{L_{rd}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_i \mathbf{e}_i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.1.63)$$

式（7.1.63）与式（7.1.52）的系数矩阵是一致的。对此，可以选择与式（7.1.54）类似的存储函数作为 Lyapunov 函数，即

$$H_E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i^T & \mathbf{e}_\psi^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma L_{sd} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{rd}} \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_\psi \end{pmatrix} \quad (7.1.64)$$

对其求导有

$$\begin{aligned} \dot{H}_E = & - \left(k_i + R_s - \omega_r^2 \frac{L_{md}^2}{4R_r} \right) \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i - \left(\frac{\sqrt{R_r} L_{md}}{L_{rd}} e_1 - \frac{\omega_r L_{md}}{2\sqrt{R_r}} e_2 - \frac{\sqrt{R_r}}{L_{rd}} e_3 \right)^2 \\ & - \left(\frac{\sqrt{R_r} L_{md}}{L_{rd}} e_2 - \frac{\omega_r L_{md}}{2\sqrt{R_r}} e_1 - \frac{\sqrt{R_r}}{L_{rd}} e_4 \right)^2 \end{aligned} \quad (7.1.65)$$

显然，根据 Lyapunov 定理，适当地选择反馈增益 k_i 使得 Lyapunov 函数的导数负定，则误差系统，即式（7.1.63）在原点渐进稳定，也就保证了跟踪误差的收敛。

（3）能量优化

对于给定速度的电动机驱动系统，在一定负载下的稳态输出功率也随之确定。进入稳态时电动机的输出转矩与负载转矩相等，此时根据不同的负载调整控制系统的磁链给定值，可以减小系统的能量损耗。由电动机的能量平衡关系式（7.1.55）可知，系统损耗的功率为输入的电功率 P_{in} 减去输出的机械功率 P_{out} ，用下式表示：

$$P_{loss} = \mathbf{i}_s^T \mathbf{u}_s - \frac{\omega_r}{n_p} T \quad (7.1.66)$$

将式（7.1.66）代入控制律式（7.1.62），并考虑系统稳态时的情况，整理可得

$$P_{\text{loss}} = \frac{R_s}{L_{\text{md}}^2} \psi_r^{*2} + \frac{R_s L_{\text{rd}}^2 + R_r L_{\text{md}}^2}{n_p^2 L_{\text{md}}^2} \frac{T_e^2}{\psi_r^{*2}} \quad (7.1.67)$$

令 $\frac{\partial P_{\text{loss}}}{\partial \psi_r^*} = 0$ ，可得最优给定磁链为

$$\psi_{\text{ropt}}^* = \sqrt{\frac{T_e}{n_p}} \left(\frac{R_s L_{\text{rd}}^2 + R_r L_{\text{md}}^2}{R_s} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (7.1.68)$$

可见，最优磁链给定值与负载转矩的开方成正比关系。负载减小时，要降低控制器的磁链给定才能获得较高的效率。当然，最后所得到的磁链给定值不能大于其额定值，以免引起磁通饱和。因此，低载时能量优化的结果更为明显。

2. 基于无源性的交流异步电动机能量最优控制策略 II

借鉴互联和阻尼分配的基于无源性控制器设计的基本思想和设计方法，依据最小磁场能量原则，设计了一种新的效率优化的感应电动机转矩跟踪控制器。

(1) 问题的描述

① 数学模型

交流异步电动机在 $\alpha\beta$ 坐标系下以定子、转子的电流作为感应电动机的状态变量，即 $\mathbf{i}_e = \begin{pmatrix} i_s^T & i_r^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{sa} & i_{sb} & i_{ra} & i_{rb} \end{pmatrix}^T$ ，此时电动机电气子系统的数学模型、能量存储函数（磁场存储能量）及输出的电磁转矩可描述为

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{i}}_e + \mathbf{C} \omega_r \mathbf{i}_e + \mathbf{R} \mathbf{i}_e = \mathbf{u} \quad (7.1.69)$$

式中， $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{sd} \mathbf{I}_2 & L_{md} \mathbf{I}_2 \\ L_{md} \mathbf{I}_2 & L_{rd} \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -L_{md} \mathbf{J}_2 & -L_{rd} \mathbf{J}_2 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_s \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & R_r \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$ 。

$$H_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_e^T \mathbf{L} \mathbf{i}_e \quad (7.1.70)$$

$$T_e = n_p \mathbf{i}_e^T \mathbf{C} \mathbf{i}_e \quad (7.1.71)$$

② 控制目标

最小磁场能量原则是基于感应电动机本身的设计特性，即一般将其额定工作点设计为（或接近）最大效率或最大功率因数点在感应电动机的大多数运行范围内，最小的磁场能量意味着此时电动机具有最小的无功功率和最大的功率因数。

因此，感应电动机运行效率优化问题可以近似为功率因数优化问题。此时，感应电动机的控制问题可以描述为在最小磁场能量条件下时变的负载转矩和转子磁通

幅值给定的跟踪控制问题。

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |T_e - T_e^*(t)| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi_r\| - \psi_r^*(t) = 0 \\ \min \frac{1}{2} \mathbf{i}_e^\top \mathbf{L} \mathbf{i}_e \end{cases} \quad (7.1.72)$$

式中, $\psi_r(t)$ 为转子磁链幅值; $\psi_r^*(t)$ 为转子磁链幅值期望值。

(2) 转子磁链幅值优化方法

根据交流异步电动机在 $\alpha\beta$ 坐标系下的磁链方程

$$\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_s^\top \quad \boldsymbol{\psi}_r^\top)^\top = (\psi_{sa} \quad \psi_{s\beta} \quad \psi_{ra} \quad \psi_{r\beta})^\top = \mathbf{L} \mathbf{i}_e \quad (7.1.73)$$

以及定子静止坐标系下转子侧的电压平衡方程

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_r - \omega_r \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_r + R_r \mathbf{i}_r = 0 \quad (7.1.74)$$

由式 (7.1.71) 及式 (7.1.74), T_e 可由转子磁链表达为

$$T_e = n_p \mathbf{i}_e^\top \mathbf{C} \mathbf{i}_e = -n_p \mathbf{i}_r^\top \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_r = \frac{n_p}{R_r} (\dot{\psi}_{r\beta} \psi_{ra} - \dot{\psi}_{ra} \psi_{r\beta} - \omega_r \psi_r^2) \quad (7.1.75)$$

式中, $\psi_r^2 = \psi_{ra}^2 + \psi_{r\beta}^2$ 。

根据矩阵论相关知识可以求得

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_r = \left[\left(\frac{R_r}{n_p \psi_r^2} T_e + \omega_r \right) \mathbf{J}_2 + \frac{\dot{\boldsymbol{\psi}}_r}{\psi_r} \mathbf{I}_2 \right] \boldsymbol{\psi}_r \quad (7.1.76)$$

为式 (7.1.75) 的一个显式解。将式 (7.1.76) 代入式 (7.1.74), 可求得转子电流的显式表达式

$$\mathbf{i}_r = - \left(\frac{T_e}{n_p \psi_r^2} \mathbf{J} + \frac{\dot{\boldsymbol{\psi}}_r}{R_r \psi_r} \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\psi}_r \quad (7.1.77)$$

再将式 (7.1.77) 代入式 $\boldsymbol{\psi}_r = L_{md} \mathbf{i}_s + L_{rd} \mathbf{i}_r$, 就可求得定子电流的显式表达式为

$$\mathbf{i}_s = \frac{1}{L_{md}} \left[\left(1 + \frac{L_{rd} \dot{\boldsymbol{\psi}}_r}{R_r \psi_r} \right) \mathbf{I} + \frac{L_{rd}}{n_p \psi_r^2} T_e \mathbf{J} \right] \boldsymbol{\psi}_r \quad (7.1.78)$$

将式 (7.1.77) 和式 (7.1.78) 代入式 (7.1.70) 可得

$$H_e = \frac{1}{2} \left[\frac{L_{sd}}{L_{md}^2} \psi_r^2 + \frac{L_{sd}L_{rd} - L_{md}^2}{L_{md}^2} \left(\frac{2}{R_r} \dot{\psi}_r \psi_r + \frac{L_{rd}}{R_r^3} \dot{\psi}_r^2 + \frac{L_{rd}}{n_p^2} \frac{T_e^2}{\psi_r^2} \right) \right] \quad (7.1.79)$$

为简化计算, 只考虑感应电动机在稳态时的效率优化, $\dot{\psi}_r = 0$, 式 (7.1.79) 可简化为

$$H_e = \frac{1}{2} \left(\frac{L_{sd}}{L_{md}^2} \psi_r^2 + \frac{L_{sd}L_{rd} - L_{md}^2}{L_{md}^2} \frac{L_{rd}}{n_p^2} \frac{T_e^2}{\psi_r^2} \right) \quad (7.1.80)$$

最后, 由 $\frac{dV_e}{d\psi_r} = 0$ 可求得, 当

$$\psi_r^4 = \frac{L_{rd}(L_{sd}L_{rd} - L_{md}^2)}{n_p^2 L_{sd}} T_e^2 \quad (7.1.81)$$

感应电动机在输出电磁转矩为 T_e 时, 具有最小的磁场存储能量。

(3) IDA-PBC 控制器的设计

假设 T_e^* 连续、有界且一次和二次可微, 则由式 (7.1.81) 计算得到的 ψ_r^* 也将连续、有界且一次和二次可微。同时, 由式 (7.1.77) 和式 (7.1.78) 计算得到的系统状态变量给定值也将连续且有界。因此, 对于由式 (7.1.69) ~ 式 (7.1.71) 描述的感应电动机数学模型以及由式 (7.1.81) 给定的转子磁通幅值, 根据感应电动机 IDA-PBC 设计方法, 可以通过阻尼注入, 构造出一个

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}_1 \mathbf{i}_s \quad (7.1.82)$$

形式的输出反馈, 使电气子系统确保严格无源。其中, \mathbf{v} 为构造的新系统输入量; \mathbf{K}_1 为注入阻尼矩阵, 定义为 $\mathbf{K}_1 = K_1 \mathbf{I}$ 。

系统的等效阻尼矩阵可定义为

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{C} \omega_r + \mathbf{R} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.83)$$

且可证明当注入阻尼矩阵系数 $K_1 > -R_s$ 时, 等效阻尼矩阵 \mathbf{R}_d 一致严格正定。根据系统严格无源的定义可证明映射 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{i}_s$ 是严格无源的, 整个闭环嵌套系统的稳定性得以保证。

如果式 (7.1.82) 中的 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}$ 与系统状态变量期望值 $\mathbf{i}_c^* \in \mathbf{R}$ 之间满足条件

$$\mathbf{v} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{i}}_c^* + \mathbf{R}_d \mathbf{i}_c^* \quad (7.1.84)$$

由式 (7.1.82) 与式 (7.1.69) 构成的闭环系统动态误差方程就可描述为

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{i}}_c^* + \mathbf{R}_d \mathbf{i}_c^* \equiv 0 \quad (7.1.85)$$

定义期望的能量存储函数为状态变量跟踪误差的二次型

$$H_e^* = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}_e^T \mathbf{L} \tilde{\mathbf{i}}_e \quad (7.1.86)$$

该能量函数在期望的稳定工作点必然具有最小值。将式 (7.1.86) 对时间求微分,并将式 (7.1.85) 代入可得

$$\dot{H}_e^* = -\tilde{\mathbf{i}}_e^T \mathbf{R}_d \tilde{\mathbf{i}}_e \leq \alpha \|\tilde{\mathbf{i}}_e\|^2 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad \alpha > 0 \quad (7.1.87)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可以推得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{i}}_e \rightarrow 0$ 。

由于式 (7.1.76) ~ 式 (7.1.78) 为输出电磁转矩方程 (7.1.75) 和磁链方程 (7.1.73) 的显式解, 因此由式 (7.1.76) ~ 式 (7.1.78) 作为系统状态变量的给定方程, 对于期望的输出电磁转矩和由式 (7.1.81) 给定的转子磁通幅值必将使

$$\begin{cases} T_e^* = \mathbf{i}_e^{*T} \mathbf{C} \mathbf{i}_e^* \\ \psi_r^* = \mathbf{L} \mathbf{i}_e^* \end{cases} \quad (7.1.88)$$

成立。描述为误差方程的形式为

$$\begin{cases} T_e - T_e^* = \tilde{\mathbf{i}}_e^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{i}}_e + 2\tilde{\mathbf{i}}_e^T \mathbf{C} \mathbf{i}_e^* \\ \psi_r - \psi_r^* = L_{md} \tilde{\mathbf{i}}_s + L_{rd} \tilde{\mathbf{i}}_r \end{cases} \quad (7.1.89)$$

可见, 当系统状态变量跟踪无差时, 系统的输出电磁转矩和转子磁通幅值必将跟踪无差。因此, 由式 (7.1.76) ~ 式 (7.1.78)、式 (7.1.81)、式 (7.1.82) 和式 (7.1.84) 就构成了交流异步电动机 IDA-PBC 的电气部分。系统对输出电磁转矩和磁通的跟踪控制是全局指数稳定的, 且感应电动机具有最小的磁场能量。假设交流异步电动机在额定运行状态具有最高的功率因数, 且其电感参数非时变, 则

$$\psi_r^* = \psi_{rN} \left(\frac{T_e^*}{T_{eN}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.1.90)$$

式中的下标 N 表示额定值。

具有高功率因数的电动机无源控制系统结构如图 7.1.2 所示。

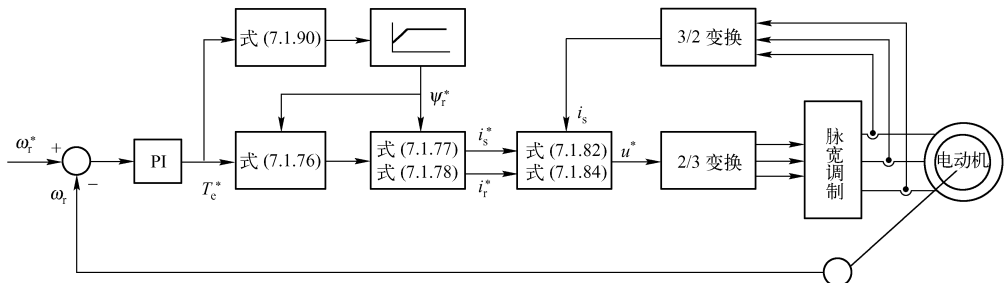


图 7.1.2 具有高功率因数的电动机无源控制系统结构框图

7.2 交流同步电动机无源控制

交流同步电动机就是与驱动电源基波频率同步运行的交流电动机。按电动机励磁方式分为直流电源励磁的电磁式，即普通的同步电动机；永磁材料励磁的永磁式；没有任何外加励磁的反应式或称为磁阻式。本节论述普通的同步电动机、永磁同步电动机无源控制。

7.2.1 基于 EL 模型的交流同步电动机无源控制

1. 同步电动机 EL 数学模型

同步旋转坐标系下，同步电动机系统状态方程可由一个 5 阶电气微分方程和一个 1 阶机械微分方程表示^[93]，即

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{sd} \\ \dot{u}_{sq} \\ \dot{u}_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s + L_{sd}p & -\omega L_{sq} & L_{md}p & L_{md}p & -\omega L_{mq} \\ \omega L_{sd} & R_s + L_{sq}p & \omega L_{md} & \omega L_{md} & L_{mq}p \\ L_{md}p & 0 & R_f + L_f p & L_{md}p & 0 \\ L_{md}p & 0 & L_{md}p & R_D + L_D p & 0 \\ 0 & L_{mq}p & 0 & 0 & R_Q + L_Q p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.1)$$

$$\frac{J}{n_p^2} \dot{\omega} + \frac{D}{n_p^2} \omega - ((L_{sd} - L_{sq})i_{sd}i_{sq} + L_{md}i_f i_{sq} + L_{md}i_{sq}i_D - L_{mq}i_E i_Q) = -\frac{T_L}{n_p} \quad (7.2.2)$$

式中， R_s 、 R_f 分别为定子、励磁绕组电阻； R_D 、 R_Q 分别为转子 d 、 q 轴电阻； L_{sd} 、 L_{sq} 分别为定子 d 、 q 轴自感； L_D 、 L_Q 分别为转子绕组 d 、 q 轴自感； L_{md} 、 L_{mq} 分别为定转子间 d 、 q 轴互感； L_f 为励磁绕组自感； J 为转动惯量； D 为阻尼系数； T_L 为负载转矩； n_p 为极对数； p 为微分算子。

系统状态变量为 $\mathbf{x} = (i_{sd} \ i_{sq} \ i_f \ i_D \ i_Q \ \omega)^T$ 表示定子、励磁、转子绕组的 d 、 q 轴电流及机械角速度；系统控制变量为 $\mathbf{u} = (u_{sd} \ u_{sq} \ u_f)^T$ 表示定子电压的 d 、 q 分量及励磁绕组电压。

将同步电动机模型方程 (7.2.1)、(7.2.2) 整理为 EL 方程形式，即

$$D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\omega, \mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{h} \quad (7.2.3)$$

式中， $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_e, J/n_p^2)$ ， $\mathbf{R} = \text{diag}(R_s, R_s, R_f, R_D, R_Q, D/n_p^2)$ ，

$$\mathbf{h} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -T_L / n_p)^T, \quad \mathbf{D}_e = \begin{pmatrix} L_{sd} & 0 & L_{md} & L_{md} & 0 \\ 0 & L_{sq} & 0 & 0 & L_{mq} \\ L_{md} & 0 & L_f & L_{md} & 0 \\ L_{md} & 0 & L_{md} & L_D & 0 \\ 0 & L_{mq} & 0 & 0 & L_Q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\omega, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & 0 & -\omega L_{mq} & L_{sd}i_{sq} \\ \omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & \omega L_{md} & \omega L_{md} & 0 & -L_{sq}i_{sd} \\ 0 & -\omega L_{md} & 0 & 0 & 0 & L_{md}i_{sq} \\ 0 & -\omega L_{md} & 0 & 0 & 0 & L_{md}i_{sq} \\ \omega L_{mq} & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_{mq}i_{sd} \\ -L_{sd}i_{sq} & L_{sq}i_{sd} & -L_{md}i_{sq} & -L_{md}i_{sq} & L_{mq}i_{sd} & 0 \end{pmatrix}^{\circ}.$$

同步电动机模型 (7.2.3) 中, 右边第一项为作用力, 左边第三项为耗散力, 第二项为可配置的无功功率, 其中矩阵 $\mathbf{C}(\omega, \mathbf{x})$ 为反对称的。

2. 同步电动机无源控制器设计

(1) 磁链、转矩控制器设计

设系统期望的输出转矩为 T_e^* , 转子磁链为 $\boldsymbol{\psi}_f$, 则为实现转子磁场渐近矢量控制和电磁转矩渐近跟踪, 控制目标制定为① 电磁转矩渐近跟踪 $\lim_{t \rightarrow \infty} (T_e - T_e^*) = 0$; ② 转子磁场渐近定向 $\lim_{t \rightarrow \infty} i_{sd} = 0$; ③ 转子磁链幅值渐近跟踪 $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\psi}_f = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_{md}i_{sd} + L_f i_f + L_{md}i_D) = \boldsymbol{\psi}$ 。

设计磁链、转矩调节器, 适当选取系统状态参考值 $\mathbf{x}^* = (i_{sd}^* \quad i_{sq}^* \quad i_f^* \quad i_D^* \quad i_Q^* \quad \omega^*)^T$ 使系统满足与式 (7.2.1) ~ 式 (7.2.3) 相应的方程式为

$$\begin{cases} n_p [(L_{sd} - L_{sq})i_{sd}^*i_{sq}^* + L_{md}i_f^*i_{sq}^* + L_{md}i_{sq}^*i_D^* - L_{mq}i_{sd}^*i_Q^*] = T_e^* \\ i_{sd}^* = 0 \\ L_{md}i_{sd}^* + L_f i_f^* + L_{md}i_D^* = \boldsymbol{\psi} \end{cases} \quad (7.2.4)$$

定义实际状态 \mathbf{x} 与状态参考值 \mathbf{x}^* 间的跟踪误差 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, 则由式 (7.2.3) 可得系统的误差动态方程为

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}_e + [\mathbf{C}(\omega, \mathbf{x}) + \mathbf{R}]\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\zeta} \quad (7.2.5)$$

式中, $\boldsymbol{\varsigma} = (\mathbf{u}^T \ 0 \ 0)^T - \{ \mathbf{D}\mathbf{x}^* + [\mathbf{C}(\omega, \mathbf{x}) + \mathbf{R}]\mathbf{x}^* \} + \mathbf{h}$ 。

定义误差系统的能量函数为

$$H_T = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{D} \mathbf{x}_e \quad (7.2.6)$$

对 H_T 求导有

$$\dot{H}_T = -\mathbf{x}_e^T \mathbf{R} \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_e^T \boldsymbol{\varsigma} \quad (7.2.7)$$

由于 \mathbf{R} 正定, 若 $\boldsymbol{\varsigma} = -\mathbf{K} \mathbf{x}_e$, $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$, $k_1, k_2, \dots, k_6 > 0$, 则有

$$\dot{H}_T = -\mathbf{x}_e^T (\mathbf{R} + \mathbf{K}) \mathbf{x}_e \quad (7.2.8)$$

$\dot{H}_T < 0$, \mathbf{x}_e 渐近收敛到零, 即有 $T_e \rightarrow T_e^*$ 。为使 $\boldsymbol{\varsigma} = -\mathbf{K} \mathbf{x}_e$ 以确保控制系统的 Lyapunov 稳定性, 同时获得期望跟踪性能, 可通过选择适当的 \mathbf{x}^* 来实现。由式 (7.2.4), 可解得系统状态参考值需满足

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{sd}^* = 0 \\ i_{sq}^* = \frac{L_f}{n_p L_{md}} \frac{T_e^*}{\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*} \\ i_f^* = \frac{\psi}{L_f} - \frac{L_{md}}{L_f} i_D^* \\ i_D^* = -\frac{R_D L_f}{L_D L_f - L_{md}^2} i_D^* + \frac{L_{md}}{L_D L_f - L_{md}^2} \dot{\psi} + \frac{L_f^2}{n_p (L_D L_f - L_{md}^2)} \frac{T_e^* \omega}{\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*} \\ \quad - \frac{L_{md} L_f}{L_D L_f - L_{md}^2} i_{sq}^* \omega^* \\ i_Q^* = -\frac{R_Q}{L_Q} i_Q^* + \frac{L_{mq}}{L_Q} i_{sd}^* \omega^* - \frac{L_{mq} L_f}{n_p L_{md} L_Q [\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*]} \left[\dot{T}_e^* - \frac{T_e^* \dot{\psi}}{\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*} \right] \\ \quad + \frac{L_{mq} L_f (L_f - L_{md})}{n_p L_{md} L_Q} \frac{T_e^* i_D^*}{[\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*]^2} \end{array} \right. \quad (7.2.9)$$

令 $\boldsymbol{\varsigma} = -\mathbf{K} \mathbf{x}_e$, 设计控制变量 $\mathbf{u} = (u_{sd} \ u_{sq} \ u_f)^T$, 使得以指数速度 $\mathbf{x}_e \rightarrow 0$, 且收敛速度可由矩阵 \mathbf{K} 调节。由转矩计算公式 (式 (7.2.4) 中的第一个式子) 及式 (7.2.9) 解得控制律为

$$\left\{ \begin{aligned} u_{sd} &= \left[\frac{L_{md}}{L_f} - \frac{L_{md}^2(L_f - L_{md})}{L_f(L_D L_f - L_{md}^2)} \right] \psi - (L_{sd} + L_{sq}) \omega i_{sq}^* - L_{mq} \omega i_Q^* - k_1 x_{e1} - \frac{R_D L_{md}(L_f - L_{md})}{L_D L_f - L_{md}^2} i_D^* \\ &\quad + \frac{L_f L_{md}(L_f - L_{md})}{n_p(L_D L_f - L_{md}^2)} \frac{T_c^* \omega}{\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*} + \left[L_{sd} - \frac{L_{md}^2(L_f - L_{md})}{L_D L_f - L_{md}^2} \right] i_{sq} \omega^* \\ u_{sq} &= L_{mq} i_Q^* + R_s i_{sq}^* + \frac{T_c^* \omega}{n_p i_{sq}^*} - L_{sq} i_{sd} \omega^* - k_2 x_{e2} \\ &\quad + \frac{L_{sq} L_f}{n_p L_{md}} \left\{ \frac{\dot{T}_c^*}{\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*} - \frac{T_c^* \psi}{[\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*]^2} - \frac{(L_f - L_{md}) T_c^* i_D^*}{[\psi + (L_f - L_{md}) i_D^*]^2} \right\} \\ u_f &= \psi + R_f i_f^* - L_{md} (\omega i_{sq}^* - i_{sq} \omega^*) - k_3 x_{e3} \end{aligned} \right. \quad (7.2.10)$$

式中, k_1 、 k_2 、 k_3 均为改善系统动态响应、降低控制系统对参数变化的灵敏度而增加的阻尼项。适当调节 k_1 、 k_2 、 k_3 可使转子磁链、电磁转矩实际值快速跟随参考值, 实现负载转矩时变未知情形下控制系统期望的动、静态性能。

(2) 转子电流状态观测器的设计

根据同步电动机 EL 系统模型 (7.2.3), 转子电流观测器可设计为

$$D \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E + \mathbf{C}_E(\omega, \mathbf{x}_E) \hat{\mathbf{x}}_E + \mathbf{R}_E \hat{\mathbf{x}}_E = (\mathbf{u}^T \quad 0)^T + \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_E - \mathbf{x}_E) + \bar{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}}_E \quad (7.2.11)$$

式中, $\mathbf{x}_E = (i_{sd} \quad i_{sq} \quad i_f \quad i_D \quad i_Q)^T$, $\hat{\mathbf{x}}_E = (\hat{i}_{sd} \quad \hat{i}_{sq} \quad \hat{i}_f \quad \hat{i}_D \quad \hat{i}_Q)^T$, $\tilde{\mathbf{x}}_E = \mathbf{x}_E - \hat{\mathbf{x}}_E$,

$$\mathbf{C}_E(\omega, \mathbf{x}_E) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & 0 & -\omega L_{md} \\ \omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & \omega L_{md} & \omega L_{md} & 0 \\ 0 & -\omega L_{md} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega L_{mq} & 0 & 0 & 0 \\ \omega L_{mq} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & 0 & 0 \\ \omega(L_{sd} + L_{sq}) & 0 & \omega L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega L_{md} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega L_{mq} & 0 & 0 & 0 \\ \omega L_{mq} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 \end{pmatrix}。$$

k_5 、 k_6 、 $k_7 > 0$ 用于调节控制收敛速率。采用状态反馈方法, 实现了电动机转子

电流的在线观测与自调整，可有效克服转子状态参数的不确定性对 PBC 性能产生的不利影响。

为提高同步电动机的控制性能，PBC 与自适应控制相结合，实现负载转矩时变未知情形下磁链、转速的渐近跟踪，并可有效抑制由转子电阻变化引起的跟踪误差 [94、95]。

7.2.2 交流永磁同步电动机无源控制

1. 基于 EL 模型的永磁同步电动机无源控制

(1) 基于 EL 模型永磁同步电动机无源控制器设计 I [96]

① 永磁同步电动机数学模型

为研究永磁同步电动机的模型，作如下假设：(a) 永磁同步电动机三相绕组在空间上互差 120° 电角度，所产生的磁势沿气隙圆周按正弦规律分布，并具有正弦反电动势；(b) 磁路线性且不考虑磁路饱和；(c) 忽略电动机中的涡流损耗和磁滞损耗。

永磁同步电动机在两相同步旋转 dq 坐标系中的电气数学模型具有 EL 形式

$$\begin{pmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_{sd}}{dt} \\ \frac{di_{sq}}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n_p \omega_m L_{sq} \\ n_p \omega_m L_{sd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n_p \omega_m \psi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{pmatrix} \quad (7.2.12)$$

式中， ψ_r 为永磁磁链。

PMSM 的机械方程为

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + D\omega_m = T_e - T_L \quad (7.2.13)$$

式中， D 为黏性系数。

电磁转矩方程为

$$T_e = n_p [\psi_r i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}] \quad (7.2.14)$$

磁链方程为

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.15)$$

把从式 (7.2.15) 得到的 i_{sd} 、 i_{sq} 代入式 (7.2.12) 和式 (7.2.14) 得

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_d \\ \dot{\psi}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n_p \omega_m \\ n_p \omega_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} \quad (7.2.16)$$

$$T_e = -n_p \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} \quad (7.2.17)$$

② 无源电流控制器设计

定义状态向量 $(\psi_d \ \psi_q \ \omega_m \ \theta_m)^T$ ，电流参考向量为 $(i_{sd}^* \ i_{sq}^*)^T$ 。迫使 $(i_{sd} \ i_{sq})^T$ 跟踪 $(i_{sd}^* \ i_{sq}^*)^T$ 的 PI 电流环为

$$\begin{cases} u_{sd} = k_{dp}(i_{sd}^* - i_{sd}) + k_{di} \int_0^t (i_{sd}^* - i_{sd}) dt & k_{dp}, k_{di} > 0 \\ u_{sq} = k_{qp}(i_{sq}^* - i_{sq}) + k_{qi} \int_0^t (i_{sq}^* - i_{sq}) dt & k_{qp}, k_{qi} > 0 \end{cases} \quad (7.2.18)$$

假设适当地选择正的 k_{dp} 、 k_{di} 、 k_{qp} 和 k_{qi} ，电流环性能良好，则参考电流矢量可视为 PMSM 的输入。于是，PMSM 在 dq 坐标系中的数学模型可简化为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_d \\ \dot{\psi}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n_p \omega_m \\ n_p \omega_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{pmatrix} \\ J \frac{d\omega_m}{dt} + D\omega_m = T_e - T_L \\ T_e = -n_p \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.2.19)$$

由于永磁同步电动机是严格的无源系统^[97]，可基于无源性设计电流控制器。

设期望的磁链为 $\psi^* = (\psi_d^* \ \psi_q^*)^T$ ，则磁链跟踪误差为 $\psi_e = \psi - \psi^*$ ，亦有 $\psi = \psi_e + \psi^*$ 并代入 (7.2.19) 中第一个方程，可得

$$\dot{\psi}_e + n_p \omega_m J_2 \psi_e = -R i^* - (\dot{\psi}^* + n_p \omega_m J_2 \psi^*) \quad (7.2.20)$$

控制的目的是找出控制输入 i^* 确保 ψ_e 收敛到 0。闭环系统的能量函数定义为

$$H = \frac{1}{2} \psi_e^T \psi_e \quad (7.2.21)$$

由式 (7.2.21) 可得

$$\dot{H} = -\dot{\psi}_e^T (-R i^* + \dot{\psi}^* + n_p \omega_m J_2 \psi^*) \quad (7.2.22)$$

取

$$i^* = -R^{-1}(\dot{\psi}^* + n_p \omega_m J_2 \psi^*) + R^{-1} K_f \psi_e \quad (7.2.23)$$

可保证 ψ_e 收敛到 0。式 (7.2.23) 中 $\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} k_{fd} & 0 \\ 0 & k_{fq} \end{pmatrix}$, $k_{fd} > 0$, $k_{fq} > 0$ 。

A. 计算 ψ^*

由式 (7.2.23) 可知, 确定 i^* 需计算 ψ^* 。如果在 dq 坐标系中直轴电流 i_{sd} 维持等于 0, 则 PMSM 运行在最大转矩状态。在这种条件下, 由式 (7.2.15) 可得

$$\begin{cases} \psi_d^* = \psi_r \\ \psi_q^* = L_{sq} i_{sq}^* \end{cases} \quad (7.2.24)$$

相应于 ψ^* 的 T_e^* 由式 (7.2.17) 得出。将式 (7.2.24) 代入式 (7.2.17) 得

$$T_e^* = \frac{n_p \psi_r}{L_{sq}} \psi_q^* \quad (7.2.25)$$

于是可得

$$\psi_q^* = \frac{L_{sq}}{n_p \psi_r} T_e^* \quad (7.2.26)$$

B. 计算 T_e^*

根据数学模型 (7.2.19) 计算 T_e^* 。取 ω_m 等于 ω_m^* , 得

$$T_e^* = J \dot{\omega}_m^* + D \omega_m^* + \hat{T}_L \quad (7.2.27)$$

这种控制结构有两个不足: (a) 开环; (b) 收敛速率由机械时间常数 J/D 限制。为克服上述不足, T_e^* 采用下列形式:

$$T_e^* = J \dot{\omega}_m^* - z + \hat{T}_L \quad (7.2.28)$$

式中, z 为低通滤波器的输出, 即满足

$$\dot{z} = -az + b(\omega_m - \omega_m^*) \quad a > 0, b > 0 \quad (7.2.29)$$

利用这种选择, 速度误差 $\omega_m - \omega_m^*$ 收敛速率取决于自然机械阻尼。收敛速率可由 a 和 b 调节, 其作用与 PD 控制律相同。在实际工程中, 负载转矩是未知的, 必须对其进行估算。为此, 采用如下自适应律:

$$\dot{\hat{T}}_L = -K_L (\omega_m - \omega_m^*) \quad K_L > 0 \quad (7.2.30)$$

可以证明, 如果期望的动态输出向量为

$$\mathcal{G} = -\mathbf{R}^{-1}(\dot{\psi}^* + n_p \omega_m \mathbf{J}_2 \psi^*) \quad (7.2.31)$$

闭环系统是严格无源的。

[illegible](2) 基于 EL 模型永磁同步电动机无源控制器设计 II^[97]

对于隐极式或面装式转子结构永磁同步电动机, $L_{sd} = L_{sq}$, 根据无源控制器设

$$\begin{pmatrix} L_{\text{sd}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\text{sq}} & 0 \\ 0 & 0 & J/n_{\text{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\text{sd}} \\ i_{\text{sq}} \\ \dot{\omega}_{\text{r}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\text{r}} L_{\text{sq}} & 0 \\ \omega_{\text{r}} L_{\text{sq}} & 0 & \psi_{\text{r}} \\ 0 & -\psi_{\text{r}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\text{sd}} \\ i_{\text{sq}} \\ \omega_{\text{r}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{\text{s}} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\text{s}} & 0 \\ 0 & 0 & D/n_{\text{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\text{sd}} \\ i_{\text{sq}} \\ \omega_{\text{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\text{sd}} \\ u_{\text{sq}} \\ T_{\text{L}}/n_{\text{p}} \end{pmatrix} \quad (7.2.32)$$

• 202 •

$\mathbf{u} = (u_{sd} \quad u_{sq} \quad T_L / n_p)^T$ 。式 (7.2.32) 变为

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (7.2.33)$$

式 (7.2.33) 为永磁同步电动机的 EL 数学模型

② 永磁同步电动机无源控制器设计

A. 期望稳定平衡点的确定

系统期望的稳定点为 $\mathbf{x}^* = (i_{sd}^* \quad i_{sq}^* \quad \omega_r^*)^T$ ， ω_r^* 为系统给定值， i_{sd}^* 、 i_{sq}^* 可按 I 中的方法确定。

B. 无源控制器设计

基于 EL 方程的无源控制器具有良好的稳态性能，但抗负载能力较弱，并且收敛速度较慢。为加快系统收敛速度，提出在控制器中注入阻尼，使误差能量函数快速变为零。注入阻尼的无源控制器在动态过程中系统控制性能只是加速收敛，其他方面没有得到改善，并且系统存在强耦合。为此，在式 (7.2.33) 两边同时注入基于状态变量误差 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ 的阻尼项 $\mathbf{R}_a \mathbf{x}_e$ ，则式 (7.2.33) 变为

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e = \mathbf{u} + \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e \quad (7.2.34)$$

由式 (7.2.34) 得

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{u} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e - (\mathbf{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e \quad (7.2.35)$$

取误差能量函数为

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{M} \mathbf{x}_e \quad (7.2.36)$$

对式 (7.2.36) 求导得

$$\dot{H} = \mathbf{x}_e^T [\mathbf{u} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e - (\mathbf{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e] \quad (7.2.37)$$

令控制器的控制律为

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x}^* - \mathbf{R}_a \mathbf{x}_e \quad (7.2.38)$$

则有

$$\dot{H} = -\mathbf{x}_e^T (\mathbf{R} + \mathbf{R}_a) \mathbf{x}_e < 0 \quad (7.2.39)$$

根据式 (7.2.38) 得出具体无源控制律为

$$\begin{cases} u_{sd} = -\omega_r L_{sq} i_{sq} - i_{sd} \\ u_{sq} = L_{sq} \dot{i}_{sq}^* + \omega_r (L_{sq} i_{sd} + \psi_r) + (R_s + R_a) i_{sq}^* - R_a i_{sq} \end{cases} \quad (7.2.40)$$

C. 控制器性能分析

将式 (7.2.40) 代入 EL 模型 (7.2.32) 中，得出

$$\begin{cases} \frac{L_{sq}}{R_s + R_a} \frac{di_{sd}}{dt} + i_{sd} = 0 \\ \frac{L_{sq}}{R_s + R_a} \frac{di_{sq}}{dt} + i_{sq} = i_{sq}^* \end{cases} \quad (7.2.41)$$

由式 (7.2.39) 可知控制器误差能量函数收敛速度与阻尼注入时相同, 同时由式 (7.2.41) 可以看出控制律 (7.2.40) 可以实现电流解耦, 提高系统的稳态和动态性能。

根据上述无源控制器的设计过程, 可得永磁同步电动机无源控制系统框图如图 7.2.2 所示。

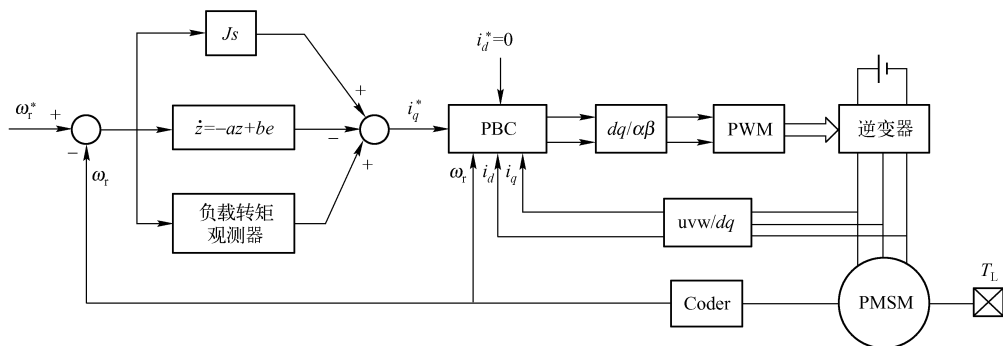


图 7.2.2 永磁同步电动机无源控制系统框图

2. 基于 PCHD 模型的永磁同步电动机无源控制^[98~101]

(1) 永磁同步电动机的 PCHD 数学模型

根据例 5.1.6 可得永磁同步电动机的 PCHD 数学模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_H - \mathbf{R}_H) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_H \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}_H^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (7.2.42)$$

$$\text{式中, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{sd} i_{sd} \\ L_{sq} i_{sq} \\ J \omega_r / n_p \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \omega_r / n_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \\ -T_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \omega_r / n_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(L_{sd}, L_{sq}, J), \quad H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{2L_{sd}} x_1^2 + \frac{1}{2L_{sq}} x_2^2 + \frac{1}{2J} x_3^2,$$

$$\mathbf{J}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_p x_2 \\ 0 & 0 & -n_p(x_1 + \psi_r) \\ -n_p x_2 & n_p(\psi_r + x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_H = \begin{pmatrix} -R_s & 0 & 0 \\ 0 & -R_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

(2) 基于 PCHD 模型的永磁同步电动机无源控制

① 系统平衡点(期望轨迹)的确定

为确定系统平衡点, 先把式 (7.2.42) 中的第一个方程写成

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -R_s \frac{x_1}{L_{sd}} + \frac{n_p}{J} x_3 x_2 + u_{sd} \\ \frac{dx_2}{dt} = -R_s \frac{x_2}{L_{sq}} - \frac{n_p}{J} x_3 x_1 - \frac{n_p}{J} x_3 \psi_r + u_{sq} \\ \frac{dx_3}{dt} = n_p \psi_r \frac{x_2}{L_{sq}} + n_p x_1 \frac{x_2}{L_{sq}} - n_p x_2 \frac{x_1}{L_{sd}} - T_L \end{cases} \quad (7.2.43)$$

负载转矩恒定已知($T_L = T_{L0}$)时, 由式 (7.2.43) 可知平衡点处有 $T_e = T_e^* = T_L^*$, 利用最大转矩/电流(MTPA)原理求出 i_{sd} 、 i_{sq} 与给定电磁转矩 T_e^* 的关系, 确定期望的平衡点。最大转矩/电流原理就是在一定的定子电流条件下获得最大转矩输出的控制方法。对于隐极永磁同步电动机, 有 $L_{sd} = L_{sq}$, 根据 $T_e = n_p[\psi_{sr} i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}]$ 可以看出: 无论 i_{sd} 是否为 0, 电磁转矩 T_e 都与 i_{sq} 成线性变化。此时, 对于一定的转矩输出, $i_{sd} = 0$ 的控制方式可使对应的定子电流最小, 即最大转矩/电流控制就是 $i_{sd} = 0$ 的控制。对于凸极永磁同步电动机 ($L_{sd} \neq L_{sq}$), 一般有 $L_{sd} < L_{sq}$, 则有

$$T_e = n_p[\psi_{sr} i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}] = n_p \left[\psi_{sr} i_{sd} \cos \beta + \frac{1}{2} (L_{sq} - L_{sd}) i_s^2 \sin 2\beta \right] \quad (7.2.44)$$

式中, $i_s = \sqrt{i_{sd}^2 + i_{sq}^2}$, $i_{sd} = -i_s \sin \beta$, $i_{sq} = i_s \cos \beta$ 。

对于一定的 i_s , 为了获得 MTPA 条件 T_e 对 β 求导, 即 $\frac{dT_e}{d\beta} = 0$, $\frac{dT_e}{d\beta^2} < 0$, 得

$$i_{sd} \left(i_{sd} - \frac{\psi_{sr}}{L_{sq} - L_{sd}} \right)^3 = \left[\frac{T_L^*}{n_p (L_{sq} - L_{sd})} \right]^2 \quad (7.2.45)$$

$$i_{sd} = \frac{\psi_{sr}}{2(L_{sq} - L_{sd})} - \sqrt{\frac{\psi_{sr}^2}{4(L_{sq} - L_{sd})^2} + i_{sq}^2} \quad (7.2.46)$$

稳态时，在平衡点处有 $T_c = T_c^* = T_L^*$ ， $i_{sd} = i_{sd}^*$ ， $i_{sq} = i_{sq}^*$ ，从而有

$$i_{sd}^* \left(i_{sd}^* - \frac{\psi_{sr}}{L_{sq} - L_{sd}} \right)^3 = \left[\frac{T_L^*}{n_p (L_{sq} - L_{sd})} \right]^2 \quad (7.2.47)$$

$$i_{sq}^{*2} = i_{sd}^{*2} - \frac{\psi_{sr} i_{sd}^*}{L_{sq} - L_{sd}} \quad (7.2.48)$$

由式 (7.2.47) 可知， $i_{sd}^* = f(T_L^*)$ 。用计算机实现时，根据数值精度要求，利用式 (7.2.47) 建立 i_{sd}^* 与 T_L^* 之间的数值对应存储表。对于给定转矩 $T_c^* = T_L^*$ ，通过查表可确定相应的 i_{sd0} ，再利用式 (7.2.48) 即可求得 i_{sq}^* 。于是，对于期望的 ω_m^* (ω_r^* / n_p)，得到闭环系统期望的平衡点为

$$\mathbf{x}^* = (x_1^* \quad x_2^* \quad x_3^*)^T = (L_{sd} i_{sd}^* \quad L_{sq} i_{sq}^* \quad J \omega_r^* / n_p)^T \quad (7.2.49)$$

此时，由式 (7.2.42) 求得平衡点处对应的输入为

$$\begin{cases} u_{sd}^* = R_s \frac{x_1^*}{L_{sd}} - \frac{n_p}{J} x_2^* x_3^* \\ u_{sq}^* = R_s \frac{x_2^*}{L_{sq}} + \frac{n_p}{J} x_1^* x_3^* + \frac{n_p}{J} x_3^* \psi_r \\ T_L^* = \frac{n_p}{L_{sq}} (\psi_r x_2^* + x_1^* x_2^*) - \frac{n_p}{L_{sd}} x_1^* x_2^* \end{cases} \quad (7.2.50)$$

② 控制器设计

设 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ ，取系统期望哈密顿函数为

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e} \quad (7.2.51)$$

$$\text{取 } \begin{cases} \mathbf{J}_a(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & 0 & -J_{23} \\ -J_{13} & J_{23} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.2.52)$$

式中， J_{12} 、 J_{13} 、 J_{23} 与 r_1 、 r_2 分别为待定的互联和阻尼参数。

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_a}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}^* \end{cases} \quad (7.2.53)$$

把式 (7.2.53) 代入式 (5.2.88) 得

$$-[\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathcal{R}_d] \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}^* = -[\mathbf{J}_a(\mathbf{x}) - \mathcal{R}_a] \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{g}_H \mathbf{u} \quad (7.2.54)$$

由式 (7.2.54) 可得

$$\begin{cases} u_{sd} = u_{sd}^* - \frac{r_1}{L_{sd}}(x_1 - x_1^*) - \left(\frac{J_{12}}{L_{sq}} + \frac{n_p x_3^*}{J} \right) (x_2 - x_2^*) + \frac{J_{13}}{J} (x_3 - x_3^*) \\ u_{sq} = u_{sq}^* + \left(\frac{J_{12}}{L_{sd}} + \frac{n_p x_3^*}{J} \right) (x_1 - x_1^*) - \frac{r_2}{L_{sq}} (x_2 - x_2^*) - \frac{J_{23}}{J} (x_3 - x_3^*) \\ T_L = T_L^* + \left(\frac{J_{13}}{L_{sd}} + \frac{n_p x_2^*}{L_{sq}} \right) (x_1 - x_1^*) - \left(\frac{J_{23}}{L_{sq}} + \frac{n_p x_1^*}{L_{sd}} \right) (x_2 - x_2^*) \end{cases} \quad (7.2.55)$$

负载转矩恒定已知时，有 $T_L = T_L^*$ ，此时选择 $J_{13} = -\frac{n_p L_{sd}}{L_{sq}} x_2^*$ 、 $J_{23} = -\frac{n_p L_{sq}}{L_{sd}} x_1^*$ ，可使式 (7.2.55) 中的第三个式子成立；再选择 $J_{12} = 0$ ，并将 $\mathbf{x}^* = (L_{sd} i_{sd}^* \quad L_{sq} i_{sq}^* \quad J \omega_r^* / n_p)^T$ 和所选参数代入式 (7.2.55)，得控制器为

$$\begin{cases} u_{sd} = u_{sd}^* - r_1 (i_{sd} - i_{sd}^*) - \omega_r^* L_{sq} (i_{sq} - i_{sq}^*) - L_{sd} i_{sq}^* (\omega_r - \omega_r^*) \\ u_{sq} = u_{sq}^* + \omega_r^* L_{sd} (i_{sd} - i_{sd}^*) - r_2 (i_{sq} - i_{sq}^*) + L_{sq} i_{sd}^* (\omega_r - \omega_r^*) \end{cases} \quad (7.2.56)$$

③ 稳定性分析

根据 $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{x_1}{L_{sd}} \quad \frac{x_2}{L_{sq}} \quad \frac{x_3}{J} \right)^T$ 和式 (7.2.53) 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial^2 H_d}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1} \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (7.2.57)$$

当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ 时， $\frac{\partial H_d}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$ 且 $H_d(\mathbf{x})$ 的海森矩阵 $\frac{\partial^2 H_d}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) > 0$ （正定），由

式 (7.2.57) 很容易证明式 (5.2.90) ~ 式 (5.2.92) 成立, 因此闭环系统在平衡点是稳定的。

④ 负载转矩恒定未知情况下的控制器设计

A. 负载转矩观测器设计

实际系统中, 负载转矩经常是恒定未知的, 而 ω_r 、 i_{sd} 、 i_{sq} 是可测的, 因此, 利用误差反馈校正构造负载转矩观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}}_r = \frac{n_p^2}{J} [\psi_{sr} i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}] - \frac{n_p}{J} \hat{T}_L + k_1 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \\ \dot{\hat{T}}_L = k_2 (\omega_r - \hat{\omega}_r) \end{cases} \quad (7.2.58)$$

式中, k_1 、 k_2 是设计参数。负载转矩恒定已知时, 由永磁电动机运动方程, 有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_r = \frac{n_p^2}{J} [\psi_{sr} i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}] - \frac{n_p}{J} T_L \\ \dot{T}_L = 0 \end{cases} \quad (7.2.59)$$

定义估计误差 $\tilde{\omega}_r = \omega_r - \hat{\omega}_r$, $\tilde{T}_L = T_L - \hat{T}_L$ 。由式 (7.2.58) 和式 (7.2.59) 可得误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\omega}}_r = -k_1 \tilde{\omega}_r - \frac{n_p}{J} \tilde{T}_L \\ \dot{\tilde{T}}_L = -k_2 \tilde{\omega}_r \end{cases} \quad (7.2.60)$$

容易证明, 当选择 $k_1 > 0$, k_1 、 $k_2 < 0$ 时, 观测器是渐近稳定的。由式 (7.2.60)

求得观测器的极点为 $s_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 + \frac{4n_p k_2}{J}}$, 若观测器的两个极点都配置在 $s_1 = s_2 = -p$ 处 ($p > 0$), 则有

$$\begin{cases} k_1 = 2p \\ k_2 = -\frac{J}{4n_p} k_1^2 = -\frac{J}{n_p} p^2 \end{cases} \quad (7.2.61)$$

适当选择 p , 可使负载转矩估计误差按指数迅速衰减到零, 从而保证了 \hat{T}_L 迅速收敛到 T_L 。

B. 系统平衡点 (期望轨迹) 的确定

负载转矩恒定未知时, 用 \hat{T}_L 来代替式 (7.2.45)、式 (7.2.46) 中的 T_L^* , 求得 \hat{i}_{sd}^* 、 \hat{i}_{sq}^* 。此时, 对于期望的 ω_r^* , 则平衡点变为

$$\hat{\mathbf{x}}^* = (\hat{x}_1^* \quad \hat{x}_2^* \quad \hat{x}_3^*)^T = (L_{sd} \hat{i}_{sd}^* \quad L_{sq} \hat{i}_{sq}^* \quad J \omega_r^* / n_p)^T \quad (7.2.62)$$

将式(7.2.62)代入式(7.2.49)可得 \hat{u}_{sd}^* 、 \hat{u}_{sq}^* 及 \hat{T}_L 。

C. 控制器设计

负载转矩恒定未知时, 只要用 $\hat{\mathbf{x}}^*$ 、 \hat{T}_L 分别代替 \mathbf{x}^* 、 T_L^* , 则由式(7.2.55)很容易得出控制器为

$$\begin{cases} u_{sd} = \hat{u}_{sd}^* - r_1(i_{sd} - \hat{i}_{sd}^*) - \omega_r^* L_{sq}(i_{sq} - \hat{i}_{sq}^*) - L_{sd}\hat{i}_{sq}^*(\omega_r - \omega_r^*) \\ u_{sq} = \hat{u}_{sq}^* + \omega_r^* L_{sd1}(i_{sd} - \hat{i}_{sd}^*) - r_2(i_{sq} - \hat{i}_{sq}^*) + L_{sq}\hat{i}_{sd}^*(\omega_r - \omega_r^*) \end{cases} \quad (7.2.63)$$

D. 稳定性分析

对于负载转矩恒定已知和恒定未知两种情况, 只是 $\mathbf{J}_a(\mathbf{x})$ 中 J_{13} 与 J_{23} 的选取稍有变化, $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$ 反对称和 \mathbf{R}_d 半正定的条件仍然成立。采用观测器估计负载转矩, 仅仅影响系统平衡点 \mathbf{x}^* 中的 x_1^* 、 x_2^* , 而闭环系统的 PCHD 结构并未改变。因此, 参照负载转矩恒定已知时稳定性的分析方法, 不难得出负载转矩恒定未知时平衡点渐近稳定的结论。

(3) 其他永磁同步电动机无源控制策略简介

为进一步提高永磁同步电动机的静态和动态性能, 可灵活地选择互联和阻尼分布^[102]。参考文献[103]基于能量成型和哈密顿理论提出了永磁同步电动机速度调节的反馈控制方案。永磁同步电动机在一定的工作条件下呈现出混沌运动状态, 可能导致系统失控, 使系统彻底崩溃。所以控制混沌, 使系统运行到各种正常的有序状态是实际问题的需要。由于混沌系统自身的特点, 使得混沌控制不同于常规控制问题。对此, 参考文献[104]基于该混沌系统的特征提出控制混沌的新方法, 使混沌系统大范围渐近稳定并进行干扰抑制。采用非线性系统无源化方法设计该混沌系统的反馈镇定器, 利用 L_2 性能准则进行干扰抑制。针对永磁同步电动机磁链变化时会对电动机运行产生影响的问题, 参考文献[105]依据哈密顿反馈耗散理论, 在磁场同步旋转坐标系下, 选择定子电流和转子转速为系统状态变量, 研究转子永磁体磁链变化时对电动机转速的影响, 并给出了基于哈密顿反馈耗散理论的磁链自适应估算方法。该方法能够准确地跟踪永磁体转子磁链变化的真实情况, 对电动机参数不敏感, 鲁棒性强, 在磁链发生改变的情况下控制器能够快速估算磁链的改变值, 使电动机转速实现快速稳定, 达到控制精确度要求。

参 考 文 献

- [1] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志.现代鲁棒控制理论及应用[M].北京: 清华大学出版社, 2003.
- [2] 冯纯伯, 张侃健. 非线性系统的鲁棒控制[M].北京: 科学出版社, 2004.
- [3] Arjan van der Schaft.非线性控制中的 L_2 增益和无源化方法[M]. 孙元章, 刘前进, 杨新林译. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [4] 焦晓红, 关新平. 非线性系统分析与设计[M].北京: 电子工业出版社, 2008.
- [5] 李立康. Sobolev 空间引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.
- [6] 卢强, 孙元章. 电力系统非线性控制[M].北京: 科学出版社, 1993.
- [7] 方勇纯, 卢桂章. 非线性系统理论[M].北京: 清华大学出版社, 2009.
- [8] 胡跃明.非线性控制系统理论与应用[M].北京: 国防工业出版社, 2002.
- [9] Ortega R, Loria A, Nicklasson P J, Sira-Ramirez H. Passivity-Based control of euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications[M]. London: Springer-verlag London Limited, 1998.
- [10] P V Kokotovic, H J Sussmann. A positive real condition for global stabilization on nonlinear systems[J]. Syst. Contr. Lett., 1989, 13: 125-134.
- [11] Christopher I Byrnes, Alberto Isidori, Jan C Willems. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(11):1228-1240.
- [12] 费吉庆. 无源化方法探讨及其在非线性系统中的应用[D]. 南京: 东南大学, 2006.
- [13] Z P Jiang and D J Hill. Passivity and disturbance attenuation via output feedback for uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1998, 43(7):992-997.
- [14] 张侃健, 冯纯伯. 一类非线性系统的自适应无源化控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(4):435-438.
- [15] Tomas Nilsson, Miguel Perez. Introduction to passivity-based control of euler-Lagrange systems[R]. School of Mathematics and Systems Engineering, Växjö University, 2003.
- [16] 孙元章, 焦晓红, 申铁龙. 电力系统非线性鲁棒控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [17] Hassan K, Khalil. Nonlinear systems. 2nd ed. [M]. Prentice Hall, Inc. Simon & Schuster, 1996.
- [18] Hans Irschik, Kurt Schlacher. Advanced dynamics and control of structures and machines[M]. New York: Springer-Verlag Wien 2004.
- [19] Arjan van der Schaft. Port-controlled Hamiltonian systems: towards a theory for control and design of nonlinear physical systems[J]. Journal of the Society of Instrument and Control

Engineers of Japan (SICE), 2000, 39(2): 91- 98.

- [20] 王玉振. 广义哈密顿控制系统理论——实现、控制与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [21] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿控制系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [22] 王久和. 交流电动机的非线性控制[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [23] R Ortega , E Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey[J] Eur. J Control, 2004, 11: 432-450.
- [24] Romeo Ortega, Arjan van der Schaft, Fernando Castañ os, Alessandro Astolfi. Control by Interconnection and standard passivity-based control of port-Hamiltonian system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(11):2527-2542.
- [25] Romeo Ortega, Arjan van der Schaft, Fernando Castañ os, Alessandro Astolfi. Control by(state-modulated) interconnection of port-Hamiltonian systems[C]. Preprints of the 7th IFAC Symposium on Nolinear Control System, 21-24 August,2007, Pretoria,South Africa,47-54.
- [26] B Maschke, R Ortega, A van der Schaft. Energy-based lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2000, 45(5): 1498-1502.
- [27] Romeo Ortega, Arjan van der Schaft, Bernhard Maschke, Gerardo Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems[J]. Automatica 38 (2002) 585-596.
- [28] Romeo Ortega, Eloísa García-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey[J]. European Journal of Control,EJC 110R-2003:1-27.
- [29] Dimitri Jeltsema, Romeo Ortega, Jacqueliën M.A. Scherpen. An energy-balancing perspective of interconnection and damping assignment control of nonlinear systems[J]. Automatica 40 (2004) 1643-1646.
- [30] Alejandro Donaire, Sergio Junco. Energy shaping, interconnection and damping assignment, and integral control in the bond graph domain[J]. Simulation Modelling Practice and Theory, 17 (2009) 152-174.
- [31] Yuqian Guo, Daizhan Cheng. Stabilization of Time-varying Hamiltonian systems[J]. IEEE Trasactions on Control Systems Technology, 2006, 14(5):871-880.
- [32] YuzhenWang, DaizhanCheng, Xiaoming Hu. Problems on time-varying port-controlled Hamiltonian systems:geometric structure and dissipative realization[J]. Automatica 41 (2005) 717-723.

- [33] Kenji Fujimoto, Kazunori Sakurama, Toshiharu Sugie. Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations[J]. Automatica 39 (2003) 2059-2069.
- [34] Z Wang, P Goldsmith. Modified energy-balancing-based control for the tracking problem[J]. IET Control Theory Appl., 2008, 2(4):310-322.
- [35] Hugo Rodríguez, Arjan J van der Schaft, Romeo Ortega. On stabilization of nonlinear distributed parameter port-controlled port-Hamiltonian systems via energy-shaping[C]. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 2001, 131-136.
- [36] Gou Nishida, Masaki Yamakita. Boundary controllability for disturbed distributed-parameter port-Hamiltonian systems [C]. SICE Annual Conference in Sapporo, August 4-6, 2004, Hokkaido Institute of Technology, Japan, 2389-2394.
- [37] A J van der Schaft, B M Maschke. Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow[J]. Journal of Geometry and Physics 42 (2002) 166-194.
- [38] J. Cervera, A.J. van der Schaft, A. Banos. Interconnection of port-Hamiltonian systems and composition of Dirac structures[J]. Automatica 43 (2007) 212-225.
- [39] Gou Nishida, Masaki Yamakita. A higher order stokes-dirac structure for distributed-parameter port-Hamiltonian systems[C]. Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston. Massachusetts June 30. July 2. 2004, 5004-5009.
- [40] Gou Nishida, Masaki Yamakita. Disturbance structure decomposition for distributed-parameter port-Hamiltonian systems[C]. 43rd IEEE Conference on Decision and Control December 14-17, 2004 Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2082-2087.
- [41] G E Swater. Introduction to Hamiltonian fluid dynamics and stability theory, CHAPMAN & HALL/CRC, 2000.
- [42] 刘玉常, 王玉振. 基于能量控制暨广义哈密顿控制系统研究新进展[J]. 山东大学学报(工学版), 2009, 29(3): 47-55.
- [43] ZHU L, WANG Y. Study on the stability of switched dissipative Hamiltonian systems[J]. Science in China: F, 2006, 49(5): 578-591.
- [44] 朱礼营, 王玉振. 切换耗散 Hamilton 系统的稳定性研究[J]. 中国科学 E 辑 信息科学, 2006, 36(6): 617-630.
- [45] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. IEEE Trans Autom Control, 1998, 43(4): 475-482.
- [46] Wang Y Z, Li C W, Cheng D Z. Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems. Automatica, 2003, 39(8): 1437-1443.

- [47] 王玉振, 李春文, 程代展. 非线性自治系统的广义 Hamilton 实现新方法. 中国科学, E 辑, 2003, 33 (4) : 313-325.
- [48] 朱礼营, 王玉振. 混杂切换 Hamilton 系统的 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2007, 22 (8) : 956-960.
- [49] Zhu L , Wang Y. Stability of hybrid dissipative Hamiltonian systems [C] . Proc of the 25th Chinese Control Conf. Harbin , 2006 : 1060-1065.
- [50] Tzann-Shin Lee. Lagrangian modeling and passivity-based control of three-Phase AC/DC voltage-source converters[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2004,51(4): 892-902.
- [51] 王久和. 电压型 PWM 整流器的非线性控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- [52] 乔树通, 姜建国. 三相 Boost 型 PWM 整流器输出误差无源性控制[J]. 电工技术学报, 2007, 22(2):68-73.
- [53] 王久和, 黄立培, 张金龙. 一种新的电压型 PWM 整流器无源控制器设计[J]. 电力自动化设备, 2008, 28 (10): 38-41.
- [54] 王久和, 黄立培, 杨秀媛. 三相电压型 PWM 整流器的无源性功率控制[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28 (21) :20-25.
- [55] Pengfei Wang, Jiuhe Wang, Zuohua Xu. Passivity-based control of three phase voltage source PWM rectifiers based on PCHD mode[C]. The 11th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS2008),1126-1130, Wuhan, P.R.China.
- [56] Wang Jiuhe, Xia Peirong, Zhang Jinlong. Control strategy of three-Phase AC/DC voltage-source converters based on storage function[C]. Power Electronics and Intelligent Transportation System Workshop PEITS2008, Guangzhou, P.R.China, 117-121.
- [57] 张晓华, 张卫杰. 三相电压型 PWM 整流器的 IDA-PB 控制[J]. 电工技术学报, 2009, 24(3):122-127.
- [58] 吴忠强, 王志君. DC/DC 变换器的一种无源化控制方案[J]. 电机与控制学报, 2008, 12 (2) : 147-150.
- [59] 王兆安, 刘进军. 电力电子技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [60] XiuHong Guo, Quanyuan Feng. Passivity-based controller design for PWM DC/DC buck current regulator[C]. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2008 WCECS 2008, San Francisco, USA.
- [61] A Kwasinski, P T Krein. Passivity-based control of buck converter with constant-power loads[C]. Power Electronics Specialists Conference, 2007, PESC2007, IEEE, 259-265.
- [62] 卢伟国, 周维维, 罗全明, 杜雄. 电压模式 Buck 变换器无源反馈混沌控制[J]. 电工技术学报, 2007, 22 (11) : 98-102.

- [63] 张鹏辉, 梁志珊. STATCOM 无源性控制与 PI 控制的比较研究[J]. 控制工程, 2008, 15 (增刊): 18-20.
- [64] 谢争先, 梁志珊, 张化光. 基于欧拉-拉格朗日系统模型的 ASVG 无源非线性综合控制[J]. 电力自动化设备, 2009, 29 (3): 61-64.
- [65] Hung-Chi Tsai, Chia-Chi Chu, Sheng-Hui Lee. Passivity-based nonlinear STATCOM controller design for improving transient stability of power systems[C]. 2005 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference & Exhibition: Asia and Pacific Dalian, China, 1-5.
- [66] 刘孙贤, 张敏, 钟义长, 朱承志. 基于 Hamilton 能量函数含 SVC 的电力系统非线性控制[J]. 电力系统及其自动化学报, 2006, 18 (4): 24-28.
- [67] 梁志珊, 谢争先, 张化光. 基于能量整形的先进静止无功发生器 (ASVG) 控制器设计[J]. 继电器, 2007, 35 (19): 50-55.
- [68] 姜齐荣, 赵东元, 陈建业. 有源电力滤波器: 结构·原理·控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [69] 薛花, 姜建国. 并联型有源滤波器的自适应无源性控制方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27 (25): 114-118.
- [70] 张振环, 刘会金, 李琼林, 张全明. 基于欧拉-拉格朗日模型的单相有源电力滤波器无源性控制新方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28 (9): 37-43.
- [71] Jian-jun Sun, Cong Li, Xiao-ming Zha, Jin-wu Gong, Shang-sheng Li. Study on passivity-based control and its robust analyzing of active power filter[C]. ICIEA 2009, 2227-2231.
- [72] 张振环, 刘会金, 张全明, 李琼林. 基于 PCH 模型的有源电力滤波器滑动耗散阻尼限幅自适应 L_2 增益控制[J]. 电工技术学报, 2008, 23 (3): 80-91.
- [73] 纪志成, 薛花, 沈艳霞. 感应电动机无源性控制方法研究[J]. 电工技术学报, 2005, 20 (3): 1-6.
- [74] 顾亮, 沈传文, 季筱隆. 基于无源性的感应电机控制系统设计[J]. 电工电能新技术, 2006, 25 (3): 42-45.
- [75] 杨耕, 罗应立. 电机与运动控制系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [76] C Cecati, N Rotondale. Torque and speed regulation of induction motors using the passivity theory approach [J]. IEEE Trans. on Industrial Electronics, 1999, 46(1): 119-127.
- [77] P J Nicklasson, R Ortega, G Espinosa-Perez. Passivity-based control of a class of Blondel-Park transformable electric machines [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1997, 42(5): 629-647.
- [78] Ji Xiaolong, Shen Chuanwen, Meng Yongqing, Su Yanmin. Research of the stable condition of the passivity-based control system for induction motor[C]. The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON), 2007, Taipei, Taiwan, 1073-1078.

- [79] 季筱隆, 沈传文, 孟永庆, 苏彦民. 无源化感应电机控制系统稳定条件研究[J]. 电工技术学报, 2007, 22 (12): 46-54.
- [80] Zuohua Xu, Jiuhe Wang, Pengfei Wang. Passivity-based control of induction motor based on Euler-Lagrange (EL) model with flexible damping[C]. The 11th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS2008), Wuhan, P.R.China.
- [81] Wang Jiuhe, Zhou Yali, Xia Peirong. Study on the performance of a second order nonlinear tracking differentiator[C]. The 2008 International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC 2008). Shanghai, P.R.China.
- [82] 李华德. 电力拖动自动控制系统 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [83] Ortega R, Espinosa G. Torque regulation of induction motors[J]. Automatica, 1993, 29(3):621-633.
- [84] 杨苹, 陈武, 刘穗生. 基于无源性理论的异步电机转速控制[J]. 电力系统及其自动化学报, 2007, 19 (2): 73-77.
- [85] 王涛, 肖建, 李冀昆. 感应电机无源性分析及自适应控制[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27 (6): 31-34.
- [86] R Ortega, G Espinoza-Pérez. Passivity-based control with simultaneous energy-shaping and damping injection: the induction motor case study[C]. Proceeding of the 16th IFAC World Congress. Prague: Elsevier Science, 2005.
- [87] 王海亮, 于海生. 异步电动机哈密顿控制系统的建模与仿真[J]. 青岛大学学报 (工程技术版), 2006, 21 (1): 33-38.
- [88] Humberto GONZÁLEZ, Manuel A, Duarte-mermoud, Ian Pelissier, Juan Carlos Travieso-torres, Romeo Ortega. A novel induction motor control scheme using IDA-PBC[J]. J Control Theory Appl, 2008, 6(1):59-68.
- [89] 崔纳新, 张承慧, 杜春水. 变频调速异步电动机效率优化控制的研究进展[J]. 电工技术学报, 2004, 19 (5): 36-42.
- [90] 季筱隆, 沈传文, 孟永庆, 苏彦民. 基于无源性的定子磁场定向感应电机控制器[J]. 西安交通大学学报, 2007, 41 (8): 964-968.
- [91] 林飞, 刘晓敏, 郑琼林. 基于无源化的感应电机能量最优控制[J]. 电力自动化设备, 2005, 25 (1): 28-31.
- [92] 季筱隆, 沈传文, 孟永庆, 苏彦民. 基于无源性的感应电机最小磁场能量的效率优化控制[J]. 西安交通大学学报, 2008, 42 (6): 728-733.
- [93] 薛花, 姜建国. 同步电动机无源性控制方法[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42 (12): 2015-2019.
- [94] 马良河, 姜建国. 同步电动机任意设定转速的无源性跟踪控制[J]. 电工技术学报,

2004, 19 (9) : 37-41.

- [95] 薛花, 姜建国. 基于无源性的同步电动机自适应控制[J]. 电工技术学报, 2009, 24 (10) : 33-39.
- [96] A Y Achour, B Mendil, S Bacha, I Munteanu. Passivity-based current controller design for a permanent-magnet synchronous motor [J]. ISA Transactions, 48 (2009) 336-346.
- [97] 李涛, 王久和, 夏培荣, 唐义. 基于 EL 模型的三相永磁同步电动机无源控制[J]. 北京信息科技大学学报, 2010, 25 (1) : 57-61.
- [98] 于海生, 赵克友, 郭雷, 王海亮. 基于端口受控哈密顿方法的 PMSM 最大转矩/电流控制[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26 (8) : 82-87.
- [99] 裘君, 赵光宙, 齐冬莲. 基于反馈耗散方法的永磁同步电机最大转矩/电流控制[J]. 煤炭学报, 2009, 34 (9) : 1285-1290.
- [100] 于海生, 王海亮, 赵克友. 永磁同步电机的哈密顿建模与无源性控制[J]. 电机与控制学报, 2006, 10 (3) : 229-233.
- [101] 潘洪俊, 强文义, 刘宇. 哈密顿形式下永磁同步电机的无源控制[J]. 控制工程, 2009, 16 (5) : 647-650.
- [102] C De Angelo, G Bossio, G O Garcia, J Solsona, M I Valla. Speed control of PMSMs with interconnection and damping assignment or feedback linearization comments about their performance[C]. IEEE ISIE 2006, Montreal, Quebec, Canada, 2182-2187.
- [103] Haisheng Yu, Zongwei Zou, Shanshan Yu. Speed regulation of PMSM based on port-controlled Hamiltonian systems and PI control principle[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics Shenyang, China August 2009, 647-651.
- [104] 吴忠强, 谭拂晓. 永磁同步电动机混沌系统的无源化控制[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26 (18) : 159-163.
- [105] 裘君, 赵光宙. 永磁同步电机磁链自适应控制[J]. 电机与控制学报, 2009, 13 (6) : 798-803.